幾何学 I　演習問題 No.1　(2020 年 4 月 15 日)

第 1 回レポート課題　以下の問題 2 を解いて，4 月 21 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．

今回のレポート課題はオンラインでの提出の練習，および，PC 環境等が整っているかどうかのテストを兼ねています．(また TA の方には採点ができるかどうかのテストも兼ねています．) 今回のレポートの点数は最終成績には反映させませんので，何かを提出してみて下さい．もちろん可能な限り内容のあるレポートをお願いします．今後とも幾何学 I の履修を継続する予定の人で，レポート問題の提出が PC 環境等の理由によりできなかった人はメールで入谷 (`iritani@math.kyoto-u.ac.jp`) まで連絡してください．

基本問題

問題 1　X を位相空間，$A \subset X$ を部分集合とする．A に相対位相を入れるとき，包含写像 $i\colon A \to X$, $i(a) = a$ は連続であることを示せ．

問題 2　X を距離空間とする．距離から定まる位相について X はハウスルドルフであることを示せ．

問題 3　ハウスドルフ位相空間 X の部分集合 A は相対位相についてハウスドルフであることを示せ．

問題 4　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とし，$A \subset X$ と $B \subset Y$ を部分集合であって $f(A) \subset B$ が成り立つものとする．A, B に相対位相を入れるとき，f を A に制限して得られる写像 $f|_A\colon A \to B$ は連続であることを示せ．

問題 5　写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について，次は同値であることを示せ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ such that $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$

(2) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ について $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合

標準問題

問題 6　$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を 2 次元球面とする．S^2 には $\mathbb{R}^3$ からの相対位相を入れるものとする．これに次のようにして C^∞ 級多様体の構造を定める．

(1) S^2 はコンパクトハウスドルフ位相空間であることを示せ．

(2) $U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ とおく．授業で説明した立体射影の方法により写像

$$\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2 \qquad \psi\colon V \to \mathbb{R}^2$$

を定めて，その具体的表示を与えよ．ただし φ は北極 $(0,0,1)$ からの立体射影，ψ は南極 $(0,0,-1)$ からの立体射影である．

(3) φ および ψ が同相写像であることを示せ．

(4) 座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}$ および $\varphi \circ \psi^{-1}$ を計算し，C^∞ 級であることを確認せよ．また座標変換の定義域も明示せよ．

問題 7　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $p\colon X \to Y$ を全射とする．(p に関する)商位相とは次で定義される Y の位相であったことを思い出そう．

$$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid p^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}$$

Z を別の位相空間とし，写像 $h\colon X \to Z$, $g\colon Y \to Z$ が以下の可換図式を満たすとする（つまり $h = g \circ p$ とする）

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

このとき，

$$g\text{ が連続} \iff h\text{ が連続}$$

を示せ．(この性質は大変有用である.）

問題 8　$\mathbb{R}^2$ に次の同値関係 $\sim$ を考える．

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z}, y - y' \in \mathbb{Z}$$

2 次元トーラス T^2 を $\mathbb{R}^2$ をこの同値関係で割って得られる商位相空間と定義する．

(1) T^2 はコンパクトハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対して集合 $U_p \subset T^2$ 及び写像 $\varphi_p\colon U_p \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める．

$$U_p = \left\{[(x, y)] \in T^2 \,\middle|\, |x - x_0| < \frac{1}{2}, |y - y_0| < \frac{1}{2}\right\}$$
$$\varphi_p([x, y]) = (x, y) \quad \text{if } |x - x_0| < \frac{1}{2} \text{ and } |y - y_0| < \frac{1}{2}$$

U_p および $U'_p := \varphi_p(U_p)$ が開集合であること，また $\varphi_p\colon U_p \to U'_p$ が同相写像であることを示せ．

(3) $p, q \in \mathbb{R}^2$ に対して座標変換 $\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ の定義域を求め，C^∞ 級であることを示せ．

発展問題

問題 9　$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は 1 次元位相多様体の構造を持たないことを示せ．

問題 10　1 次元コンパクト連結位相多様体は円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相であることを示せ．

幾何学I　演習問題No.1 略解

問題1　$U \subset X$ を X の開集合とする．$i^{-1}(U) = A \cap U$ であるから，相対位相の定義よりこれは A の開集合.

問題2　$x \neq y$ なる点 $x, y \in X$ をとる．$d(x, y) = \epsilon$ とおき，$U = \{z \in X \mid d(x, z) < \epsilon/2\}$, $V = \{z \in X \mid d(y, z) < \epsilon/2\}$ と定めると，U, V は開集合で $x \in U$, $y \in V$．また三角不等式から $U \cap V = \emptyset$. (実際，$z \in U \cap V$ とすると，$\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \epsilon$ となって矛盾．)

問題3　$x, y \in A$ が $x \neq y$ を満たすとする．X はハウスドルフなので X の開集合 U, V が存在して $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$．ここで $U' = U \cap A$, $V' = V \cap A$ を考えると相対位相の定義から U', V' は A の開集合で，$U' \cap V' = \emptyset$，$x \in U'$, $y \in V'$．したがって A はハウスドルフ.

問題4　B の開集合 U をとる．相対位相の定義から Y の開集合 U' が存在して $U = U' \cap B$．このとき $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U')$ であるが，f の連続性から $f^{-1}(U')$ は X の開集合である．したがって $A \cap f^{-1}(U')$ は A の開集合．したがって $f|_A$ は連続.

問題5 (1) $\Rightarrow$ (2): $f^{-1}(U)$ の任意の点 x をとる．$f(x) \in U$ であるので $\exists \epsilon > 0$ s.t. $B_\epsilon(f(x)) \subset U$.（ここで $B_\epsilon(p)$ は p 中心の半径 ϵ の開球体を表す.）(1) より $\delta > 0$ が存在して $\|x - y\| < \delta \Rightarrow f(y) \in B_\epsilon(f(x))$. このことは $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset U$ を意味する．したがって $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$．すなわち任意の x に対して x を含むある開球体が $f^{-1}(U)$ に含まれる．よって $f^{-1}(U)$ は開集合.

(2) $\Rightarrow$ (1): 任意に $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ をとる．開球体 $U = B_\epsilon(f(x))$ に対して (2) を適用すると $f^{-1}(U) = f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ は x を含む開集合．したがって $\exists \delta > 0$, s.t. $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. このことは $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ を意味する.

問題6 (1) $\mathbb{R}^3$ は距離空間よりハウスドルフ，したがってその部分空間である S^2 もハウスドルフ（問題2,3参照)．また S^2 は連続写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ による閉集合 $\{1\}$ の逆像であるから，閉集合である．さらに有界であることは明らか．$\mathbb{R}^n$ の部分集合について，有界閉集合であることとコンパクトであることとは同値（Heine-Borel の被覆定理).

(2) $\varphi(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$, $\psi(x, y, z) = (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z})$.

(3) φ が同相写像であることを示す．ψ も同様なので省略する．

φ の逆写像は $\varphi^{-1}(x, y) = (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$ で与えられることは直接計算でチェックできる．特に φ は全単射である．

また φ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 1\}$ から $\mathbb{R}^2$ への連続写像の S^2 への制限であるから連続である (問題4より)．また φ^{-1} は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への連続写像で像が S^2 に含まれるものから来ているから連続である (問題4より）[1]．したがって φ, φ^{-1} はともに連続であり，φ は同相写像.

(4) 簡単な計算により $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$．定義域は $\varphi(U \cap V) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$. $\varphi \circ \psi^{-1}$ も答えは同じ．$\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ でその定義域は $\psi(U \cap V) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$.

[1] ここでは座標関数 x, y, z およびその多項式あるいはそれらの商で与えられる関数が連続であることは微分積分学で習ったこととして認めている．また $\mathbb{R}^n$ の開集合から $\mathbb{R}^m$ への写像で各成分が連続関数で与えられるものが連続であることも既に既習のこととして認めている．

問題 7　$U \subset Z$ を開集合とすると，$h^{-1}(U) = p^{-1}(g^{-1}(U))$ である．商位相の定義から

$$g^{-1}(U) \text{ が } Y \text{ の開集合} \iff p^{-1}(g^{-1}(U)) \text{ が } X \text{ の開集合}$$

である．従って，g が連続であることと，h が連続であることは同値になる．

問題 9　$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$ が 1 次元位相多様体の構造を持ったとし，$p := (0, 0) \in X$ の座標近傍 (U, ϕ) をとる．必要なら U を小さく取り直して，$U = \{(x, y) \in X \mid |\,|x|, |y| < \epsilon\}$ の形としてよい（この形の集合が $p \in X$ の基本近傍系をなすことに注意）．$\phi(U)$ は $\mathbb{R}$ の連結開集合であるから，そこから 1 点 $\phi(p)$ を除いた集合 $\phi(U) \backslash \{\phi(p)\} = \phi(U \backslash \{p\})$ は 2 つの連結成分からなる．一方，$U \backslash \{p\}$ は 4 つの連結成分からなり，ϕ が同相であったことに矛盾．

幾何学 I　演習問題 No.2 (2020 年 4 月 22 日)

レポート課題 No.2　以下の**問題 15** と**問題 16** を解いて，5 月 12 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．今回のレポートの点数は成績に反映させます．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 11　X, Y を位相空間とする．積位相空間 $X \times Y$ の開集合を記述せよ．X, Y の開集合を使って一般にどのような形に書ける集合なのか．

問題 12　位相空間 X, Y がハウスドルフのとき，積位相空間 $X \times Y$ はハウスドルフであることを示せ．

問題 13　$f_1 \colon X_1 \to Y_1,\ f_2 \colon X_2 \to Y_2$ を連続写像とする．$f_1 \times f_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ が連続写像であることを証明せよ．但し $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ と定義する．

問題 14　位相空間 X の一点コンパクト化 X^* はコンパクトであることを証明せよ．

標準問題

問題 15　$S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$ に次の局所座標を定義する．

$$
\begin{aligned}
&U_i^{\pm} = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid \pm x_i > 0\} \\
&\varphi_i^{\pm}(x_1, \dots, x_{m+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})
\end{aligned}
$$

ここで $\hat{x}_i$ は i 番目を除くことを意味する．

(1) φ_1^+ の像が $\mathbb{R}^m$ の単位開球体であることを確認し，$\varphi_1^+ \colon U_1^+ \to \varphi_1^+(U_1^+)$ が同相写像であることを証明せよ．

(2) 座標変換 $\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^-)^{-1}$ の定義域を与え，座標変換を具体的に計算せよ．

問題 16　$\mathbb{C}$ の一点コンパクト化 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の無限遠点の周りの座標 $\varphi_2 \colon \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ を次で定義する．

$$
\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C}^\times \text{ のとき} \\ 0 & z = \infty \text{ のとき} \end{cases}
$$

このとき φ_2 は同相写像であることを示せ．

問題 17　リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の次の関数 f は C^∞ 級であることを示せ．

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|^2}{|z|^2+1} & z \in \mathbb{C} \text{ のとき} \\ 1 & z = \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

問題 18　局所コンパクトハウスドルフ空間 X の一点コンパクト化はハウスドルフであることを示せ．ここで位相空間 X が局所コンパクトとは各点がコンパクトな近傍を持つこと，すなわち任意の点 $x \in X$ に対してあるコンパクト部分集合 $K \subset X$ であって x を内点にもつものが存在することである．

問題 19　M, N を C^∞ 級多様体とし，$\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M のアトラス，$\mathcal{T} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ を N のアトラスとする．このとき $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ は $M \times N$ のアトラスになることを示せ．

問題 20　M を C^∞ 級多様体，$\mathcal{S}$ をそのアトラスとする．

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \left\{(V, \psi)\colon M \text{ の chart} \;\middle|\; (V, \psi) \text{ はアトラス } \mathcal{S} \text{ に関して } C^\infty \text{ 級}\right\}$$

とおくとき[1]，$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ はアトラスになること，すなわち $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に属する 2 つの chart の間の座標変換は C^∞ 級であることを示せ．

問題 21　上記のアトラス $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスの中で包含関係に関して最大のものであることを示せ．

問題 22　位相空間 M に C^∞ 級多様体の構造を定めるアトラス $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ について

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{T}) \iff \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \text{ はアトラスになる}$$

を示せ．このとき $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ は同値なアトラスであるという．

<u>発展問題</u>

問題 23　連続な単射 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ であって像への全単射 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ が同相写像でないものを構成せよ．

問題 24　位相空間 $\mathbb{R}$ 上の互いに同値でない C^∞ 級アトラスを構成せよ．

問題 25　位相空間 $\mathbb{R}$ に C^∞ 級多様体の構造を定める 2 つの極大アトラス $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ が与えられているとする．このとき自己同相写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であって

$$(U, \varphi) \in \mathcal{M}_1 \iff (U, \varphi \circ f) \in \mathcal{M}_2$$

を満たすものが存在することを示せ．つまり位相空間 $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級多様体の構造は本質的に一意である．

[1] 本授業では，ある chart(V, ψ) がアトラス $\mathcal{S}$ に関して C^∞ 級であることを，(V, ψ) と $\mathcal{S}$ に属する任意の chart の間の座標変換が (どちらの方向も)C^∞ 級であること，と定義した．

幾何学 I　演習問題 No.2 略解

レポート課題の問題 15，16 については，詳しい解答を与えています．

問題 11　$X \times Y$ の積位相に関する開集合は，X の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ および Y の開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を使って

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times V_\alpha$$

の形に書ける集合である．

問題 12　$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ を異なる 2 点とする．このとき $x_1 \neq x_2$ あるいは $y_1 \neq y_2$ が成立する．$x_1 \neq x_2$ であれば X のハウスドルフ性から開集合 $U_1, U_2 \subset X$ であって $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在する．このとき $(x_1, y_1) \in U_1 \times Y$, $(x_2, y_2) \in U_2 \times Y$ であって $(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = \emptyset$．したがって $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ は開集合で分離される．$y_1 \neq y_2$ の時も同様である．

問題 13　$Y_1 \times Y_2$ の開集合 O をとり，$(f_1 \times f_2)^{-1}(O)$ が開集合であることを証明する．問題 11 より O は $O = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times V_\alpha$，$U_\alpha$ は Y_1 の開集合，V_α は Y_2 の開集合の形に書ける．ここで

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(O) = \bigcup_{\alpha\in A} (f_1 \times f_2)^{-1}(U_\alpha \times V_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} f_1^{-1}(U_\alpha) \times f_2^{-1}(V_\alpha)$$

であるが，$f_1^{-1}(U_\alpha)$ および $f_2^{-1}(V_\alpha)$ は f_1, f_2 の連続性から各々X_1 と X_2 の開集合である．したがって上の集合は $X_1 \times X_2$ の開集合．

問題 14　$X^* = X \cup \{\infty\}$ を X の一点コンパクト化とする．X^* の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ をとる．$\infty \in U_{\alpha_0}$ を満たす $\alpha_0 \in A$ が存在する．このとき $X \setminus U_{\alpha_0}$ は X のコンパクト集合である．$V_\alpha = U_\alpha \cap X$ とおくとき，X^* の位相の定義から V_α は X の開集合であって，$\{V_\alpha\}$ は $X \setminus U_{\alpha_0}$ の開被覆となる．コンパクト性から有限個の $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ が存在して $X \setminus U_{\alpha_0} \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$．このとき $X \subset U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$．

問題 15　(1) $U_1^+ = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_1 > 0\}$ の点 $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ は

$$x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1, \qquad x_1 > 0$$

を満たす．したがって

$$x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1 - x_1^2 < 1$$

であり，φ_1^+ の像は単位開球体 $B_1(0) = \{(y_1, \ldots, y_m) \mid y_1^2 + \cdots + y_m^2 < 1\}$ に含まれる．写像 $\psi_1^+ \colon B_1(0) \to U_1^+$ を

$$\psi_1^+(y_1, \ldots, y_m) = (\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}, y_1, \ldots, y_m)$$

で定めると

$$\varphi_1^+ \circ \psi_1^+ = \mathrm{id}_{B_1(0)}, \qquad \psi_1^+ \circ \varphi_1^+ = \mathrm{id}_{U_1^+}$$

は容易に検証される．特に φ_1^+ は全単射であり，その像は $B_1(0)$ に一致する．

　また，φ_1^+ は連続写像 $\mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ の S^m への制限であるから連続であり，ψ_1^+ は連続写像 $B_1(0) \to \mathbb{R}^{m+1}$ で像が U_1^+ に含まれているものから定まるので連続である．(問題 4 でこれらの事実が示されている．また，$\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}$ などの関数の連続性や，各成分が連続なベクトル値関数の連続性は，既習の事実として認める．) よって $\varphi_1^+ \colon U_1^+ \to B_1(0)$ は同相写像である．

(2) 座標変換の定義域は

$$\varphi_1^-(U_1^- \cap U_2^+) = \{(y_1, \ldots, y_m) \in B_1(0) \mid y_1 > 0\}$$

である．φ_1^- の逆写像は

$$(\varphi_1^-)^{-1}(y_1, \ldots, y_m) = (-\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}, y_1, \ldots, y_m)$$

で与えられるから,

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^-)^{-1}(y_1, \ldots, y_m) = (-\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}, y_2, \ldots, y_m)$$

であることが分かる．

$\boxed{\text{採点基準}}$ (1) [1 点] φ_1^+ の逆写像が明示的に与えられており，かつ φ_1^+ および $(\varphi_1^+)^{-1}$ がどちらも連続であることが主張されている．(連続性の理由が書かれていればなおよいが，書いていなくても減点はしない．)

(2) [1 点] 定義域が正しくあたえられており，かつ座標変換が正しく求められている．

問題 16 φ_2 を $\mathbb{C}^\times$ に制限して得られる写像 $\varphi_2|_{\mathbb{C}^\times} \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は明らかに同相写像である．(実際 $z \mapsto 1/z$ の逆写像は $w \mapsto 1/w$ であり，これらの関数の (実部および虚部の) 連続性は微分積分学などで既習の事実である．) また φ_2 は明らかに全単射である．そこで φ_2 が同相であることを示すには,

$$U \subset \widehat{\mathbb{C}} \text{ が } \infty \text{ の近傍} \iff \varphi_2(U) \text{ が } 0 \text{ の近傍}$$

を示せば十分である．

$$\begin{aligned} U \subset \widehat{\mathbb{C}} \text{ が } \infty \text{ の近傍} &\iff \widehat{\mathbb{C}} \setminus U \text{ があるコンパクト閉集合に含まれる} \\ &\iff \widehat{\mathbb{C}} \setminus U \text{ は } \mathbb{C} \text{ の有界部分集合} \\ &\iff \exists M > 0,\ \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\} \subset U \\ &\iff \exists M > 0,\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/M\} \subset \varphi_2(U) \\ &\iff \varphi_2(U) \text{ が } 0 \text{ の近傍} \end{aligned}$$

より従う．

$\boxed{\text{採点基準}}$ [2 点] φ_2 が $z = \infty$ で連続であること，また φ_2 の逆写像 φ_2^{-1} が $w = 0$ で連続であることの両方が示されている．一方だけだと 1 点とする．

問題 17 授業でおいたように $\varphi_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を恒等写像で与えられる $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標近傍とする．ここで $f \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{|z|^2}{|z|^2+1} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ および $f \circ \varphi_2^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2} = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ は C^∞ 級関数である．ここで $z = x + \sqrt{-1}y$ とおいた．定義より f は C^∞ 級関数である．

問題 18 X の 1 点コンパクト化を $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ とおく．包含写像 $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ に対して，$\hat{X}$ の開集合は，∞ を含まないとき $i(U)$（U は X の開集合），∞ を含むとき $\hat{X} \setminus i(K)$（K は X のコンパクト閉集合）として定義されていた．今 X は Hausdorff であるから，$\hat{X}$ において ∞ とそれ以外の点が開近傍で分離されることを見ればよい．X は局所コンパクト空間であったから，任意の点 $x \in X$ に対して，$x \in \mathring{K} \subset K \subset X$ なるコンパクト集合 K が存在する．よって $\hat{X}$ の ∞ 以外の点の開近傍を $U_1 = i(\mathring{K})$，∞ の開近傍を $U_2 = \hat{X} \setminus i(K)$ と選べば，$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる．以上より $\hat{X}$ も Hausdorff である．

問題 19　座標変換が C^∞ 級であることを示す．$(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\gamma, \varphi_\gamma) \in \mathcal{S}$，$(V_\beta, \psi_\beta), (V_\delta, \psi_\delta) \in \mathcal{T}$ を用いて，2 つの座標近傍 $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$，$(U_\gamma \times V_\delta, \varphi_\gamma \times \psi_\delta)$ を考える．座標変換は

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_\gamma \times \psi_\delta) \circ (\varphi_\alpha \times \psi_\beta)^{-1} = \varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha \times \psi_\delta \circ \psi_\beta : \\
&\qquad\qquad (\varphi_\alpha \times \psi_\beta)((U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_\gamma \times V_\delta)) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\gamma) \times \psi_\beta(V_\beta \cap V_\delta) \\
&\qquad\qquad\quad \to (\varphi_\gamma \times \psi_\delta)((U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_\gamma \times V_\delta)) = \varphi_\gamma(U_\alpha \cap U_\gamma) \times \psi_\delta(V_\beta \cap V_\delta)
\end{aligned}
$$

と書ける．$\varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\gamma) \to \varphi_\gamma(U_\alpha \cap U_\gamma)$，$\psi_\delta \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(V_\beta \cap V_\delta) \to \psi_\delta(V_\beta \cap V_\delta)$ は C^∞ 級の座標変換であるから，$(\varphi_\gamma \times \psi_\delta) \circ (\varphi_\alpha \times \psi_\beta)^{-1}$ も C^∞ 級である．

問題 20 （共通部分が空でない）2 つの座標近傍 (V_1, ψ_1), $(V_2, \psi_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ をとる．$\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ とおくとき，$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ の定義より，$\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_2) \to \psi_2(U_\alpha \cap V_2)$，$\varphi_\alpha \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_\alpha \cap V_1) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_1)$ は C^∞ 級となる．よって $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = (\psi_2 \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi_1^{-1}) : \psi_1(U_\alpha \cap V_1 \cap V_2) \to \psi_2(U_\alpha \cap V_1 \cap V_2)$ も C^∞ 級となる．$V_1 \cap V_2 = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap V_1 \cap V_2)$ より (V_1, ψ_1)，(V_2, ψ_2) の座標変換は C^∞ 級である．

問題 21　$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれない $\mathcal{S}$ を含むアトラス $\mathcal{T}$ があると仮定すると，座標近傍 (V, ψ) で $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれないものがとれるが，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{S}$ を含むから，(V, ψ) と $\mathcal{S}$ の（共通部分が空でない）任意の座標近傍との座標変換は双方に C^∞ 級である．しかし，これは $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ の定義により，(V, ψ) が $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれることになるから矛盾である．よって $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスの中で包含関係に関して最大のものである．

問題 22　$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{T})$ が成り立つとき，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ に含まれるから，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ にも含まれる．$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ の定義により，$\mathcal{T}$ に属する任意の座標近傍に対し，$\mathcal{S}$ に属する（共通部分が空でない）任意の座標近傍との座標変換は C^∞ 級である．これより $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ はアトラスになる．逆に，$\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ がアトラスのとき，問題 21 より $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスとして $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれる．$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれるような任意のアトラス $\mathcal{U}$ に対し，$\mathcal{S} \cup \mathcal{U}$ はアトラスになる．問題 20 と同様に $\mathcal{T} \cup \mathcal{U}$ も $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれるアトラスとなることが分かる．このとき $\mathcal{T} \cup \mathcal{U}$ は $\mathcal{T}$ を含むアトラスとして $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ に含まれる．よって $\mathcal{M}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{T})$ が成り立つ．$\mathcal{M}(\mathcal{S}) \supset \mathcal{M}(\mathcal{T})$ も同様に示せるので，$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{T})$ となる．

幾何学 I　演習問題　(2020 年 5 月 13 日)

レポート課題 No.3　以下の**問題 26** と**問題 32** を解いて，5 月 19 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 26　リーマン球面の間の写像 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $f(z) = az + b$ が C^∞ 級写像であることを定義に従って示せ．ただし $a \neq 0$ とし，$f(\infty) = \infty$ と定義する．

問題 27　$ad - bc \neq 0$ のとき，Möbius 変換 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \neq \infty,\ cz + d \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & cz + d = 0 \text{ のとき} \\ \frac{a}{c} & z = \infty,\ c \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z = \infty,\ c = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

は C^∞ 級微分同相 (diffeomorphism) であることを証明せよ．ただし Möbius 変換が C^∞ 級写像であることは授業で証明したので使っても良い．

問題 28　M, N, Q を C^∞ 級多様体とし，$f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ を写像とする．$p \in M$ とし，$q = f(p)$ とおく．写像 f が点 p で C^∞ 級，g が点 q で C^∞ 級のとき，写像 $g \circ f$ は点 p で C^∞ 級であることを証明せよ．但し，

写像 f が $p \in M$ で C^∞ 級 $\iff$ p の座標近傍 (U, φ) および $f(p)$ の座標近傍 (V, ψ) が存在して $f(U) \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級である

と定義する．

問題 29　M, N を C^∞ 級多様体とする．$f\colon M \to N$ が点 p の近傍で C^∞ 級であるとき，$f\colon M \to N$ は点 p で連続であることを示せ．ただし，f が点 p で連続であるとは，$f(p)$ の任意の近傍 B に対して $f^{-1}(B)$ が p の近傍になることである．

問題 30　p を通る C^∞ 級曲線とは，$c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ なる形の C^∞ 級写像 c であって $c(0) = p$ となるものとする．但し正の数 ϵ は曲線によって変わり得る．p を通る C^∞ 級曲線 $c, \tilde{c}$ に対して次の同値関係 $\sim$ を導入する．

$$c \sim \tilde{c} \iff \begin{array}{l} p \text{ を含む座標近傍 } (U, \varphi) \text{ が存在して} \\ \left.\dfrac{d}{dt}\varphi(c(t))\right|_{t=0} = \left.\dfrac{d}{dt}\varphi(\tilde{c}(t))\right|_{t=0} \end{array}$$

[1]PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

これが同値関係であることを示せ.(本質的には，右の条件が座標近傍 (U, φ) のとり方によらないこと，を示すことになる.)

問題 31　M を m 次元 C^∞ 級多様体とするとき，p を通る C^∞ 級曲線全体の集合を上の同値関係 $\sim$ で割った集合は $\mathbb{R}^m$ と同一視できることを示せ.

問題 32　2 次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の間の微分同相写像を構成し，それが実際に微分同相写像であることを定義に基づいて証明せよ.

ただし，S^2 には問題 6 にある北極 $(0, 0, 1)$ と南極 $(0, 0, -1)$ からの立体射影

$$\varphi\colon U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad \psi\colon V = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^2$$

を局所座標とすることで C^∞ 級多様体の構造を定める．また，$\widehat{\mathbb{C}}$ には $U_1 = \mathbb{C}$ 上での座標 $\varphi_1 = \mathrm{id}$(恒等写像) と $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上での座標 $\varphi_2(z) = 1/z$(ただし $\varphi_2(\infty) = 0$) により C^∞ 級多様体の構造を定める.

<u>発展問題</u>

問題 33　3 次元球面を $\mathbb{C}^2$ の部分集合として

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

とみなす．写像 $f\colon S^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ を

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{z_1}{z_2} & z_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．f は C^∞ 級写像であることを示せ．さらに f のファイバー $f^{-1}(z)$ は全ての $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して S^1 と微分同相であることを示せ.

問題 34　問題 33 の写像 $f\colon S^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ に対して C^∞ 級写像 $s\colon \widehat{\mathbb{C}} \to S^3$ であって $f \circ s = \mathrm{id}$ となるものは存在するか.

問題 35　$P(z)$, $Q(z)$ を複素数係数の多項式とする．また $Q(z)$ は多項式として 0 ではないと仮定する．このとき $\{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$ 上で定義される複素関数 $f(z) = P(z)/Q(z)$ はリーマン球面の間の C^∞ 級写像 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ に拡張されることを示せ.

問題 36　問題 35 の写像が C^∞ 級同相になるのは Möbius 変換のときに限られる．これを示せ.

問題 37　C^∞ 級曲線 $f\colon S^1 \to S^2$ は全射ではないことを示せ.(すなわちペアノ曲線のようなものは滑らかな曲線では作れない.)

幾何学I　演習問題 No.3　略解

問題 26　$\widehat{\mathbb{C}}$ をいつものように二つの座標近傍 (U_1,φ_1), (U_2,φ_2) で覆う．すなわち，$U_1=\mathbb{C}$, $\varphi_1(z)=z$ および $U_2=\mathbb{C}^\times\cup\{\infty\}$, $\varphi_2(z)=\frac{1}{z}$ ($z\neq 0$ のとき)，$\varphi_2(\infty)=0$ とおく．

(1) chart U_1 上では $f(U_1)\subset U_1$ であり，$\varphi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}(z)=az+b$ ゆえ明らかに C^∞ 級.

(2) あとは残りの点 $\infty\in\widehat{\mathbb{C}}$ で C^∞ 級であることを示す．$f(U_2\setminus\{-b/a\})\subset U_2$ であるが,

$$\begin{aligned}\varphi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}(w)&=\begin{cases}\varphi_2(a\frac{1}{w}+b) & (w\neq 0\text{ のとき})\\ \varphi_2(\infty) & (w=0\text{ のとき})\end{cases}\\ &=\begin{cases}\frac{1}{a\frac{1}{w}+b} & (w\neq 0\text{ のとき})\\ 0 & (w=0\text{ のとき})\end{cases}\\ &=\frac{w}{a+bw}\end{aligned}$$

は w 平面の $\varphi_2(\infty)=0$ の近傍で C^∞ 級である．したがって f は ∞ で C^∞ 級.

$\boxed{\text{採点基準}}$　2点. 授業では $f\colon M\to N$ が点 p で C^∞ 級であることを p を含む座標近傍 (U,φ), $f(p)$ を含む座標近傍 (V,ψ) が存在して，(1) $f(U)\subset V$, (2) $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\psi(V)$ が C^∞ 級，が成り立つことと定義した[1]．この条件が全ての $p\in M$ で成り立つとき，f は C^∞ 級写像と言われる．この問題では,

(a) [1点]$\mathbb{C}$ 上 (の各点) で C^∞ 級であることが (明らかだが) 確かめられているか,

(b) [1点] 無限遠点 ∞ で C^∞ 級であることが ($\varphi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}$ を計算することで) 確かめられているか,

の2つのポイントをみる．(a) については f が C^∞ 級と述べてあるだけで OK．(b) について, (本当はした方がいいが) $f(U_2\setminus\{-b/a\})\subset U_2$ に注意していなくても (あるいは $f(U_2)\subset U_2$ などと間違っていても) $\varphi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}$ が (正しく) 計算できていたら減点はしない．$\varphi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}$ の計算で（メインの場合だけを計算し）場合分けを怠っている解答も減点はしない.

問題 27　f の逆写像が Möbius 変換 $g(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$ で与えられることを示せばよい．詳細略.

問題 28　仮定から q の座標近傍 (V,ψ), $g(q)$ の座標近傍 (W,ξ) が存在して $g(V)\subset W$ かつ $\xi\circ g\circ\psi^{-1}\colon\psi(V)\to\xi(W)$ は $\psi(q)$ の近傍で C^∞ 級である．また次の問題 29 でみるように f が点 p で C^∞ 級であれば，f は点 p で連続である．したがって $f^{-1}(V)$ は p の近傍である．よって p の座標近傍 (U,φ) であって $U\subset f^{-1}(V)$ となるものが存在する.（このためには，まず任意に p の座標近傍 $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ をとり，$p\in O\subset f^{-1}(V)$ なる開集合 O との共通部分 $O\cap\tilde{U}$ に座標を制限すればよい.）このとき $f(U)\subset V$ である．授業中に説明したように, f が点 p で C^∞ 級であることの定義に現れる条件は，座標近傍 (U,φ), (V,ψ) のとり方によらない．したがって $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\psi(V)$ は $\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級である．このとき $g\circ f(U)\subset W$ であって $\xi\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\xi(W)$ は

$$\xi\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}=(\xi\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})$$

より $\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級の写像と $\psi(q)$ の近傍で C^∞ 級の写像の合成であるから，$\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級である.

問題 29　点 p で C^∞ 級であることの定義より点 p を含む座標近傍 (U,φ) と $f(p)$ を含む座標近傍 (V,ψ) が存在して，$f(U)\subset V$ かつ $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\varphi(V)$ が C^∞ 級写像となる.

[1] ここで (1) の条件は f が点 p で連続であることを保証するために必要である.

$f(p)$ の近傍 B に対して，$f^{-1}(B)$ が p の近傍であることを示そう．そのためには $f^{-1}(B)\cap U$ が p の近傍であることを言えばよい．$f^{-1}(B)\cap U$ は同相写像 φ により

$$(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(\psi(B\cap V))$$

に写される．$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ は連続であり，$\psi(B\cap V)$ は $\psi(f(p))$ の近傍であるから，この集合は $\varphi(p)$ の近傍である．従って $f^{-1}(B)\cap U$ は p の近傍である．

問題 30　同値関係の条件のうち「$c_1\sim c_2$ ならば $c_2\sim c_1$」および「$c\sim c$」は明らかである．推移性を証明する．c_1,c_2,c_3 を C^∞ 級曲線とし $c_1\sim c_2$, $c_2\sim c_3$ とする．このとき点 p を含む座標近傍 (U,φ), (V,ψ) が存在して，次が成立する．

$$\frac{d}{dt}\varphi(c_1(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\varphi(c_2(t))\Big|_{t=0},\qquad \frac{d}{dt}\psi(c_2(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\psi(c_3(t))\Big|_{t=0}.$$

ここで $\frac{d}{dt}\psi(c_1(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\psi(c_2(t))\Big|_{t=0}$ を示せばよい．$t=0$ の近傍で

$$(\psi\circ c_i)(t)=(\psi\circ\varphi^{-1})((\varphi\circ c_i)(t))$$

が成立する．$\psi\circ\varphi^{-1}$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合から $\mathbb{R}^m$ の開集合への C^∞ 級写像，$\varphi\circ c_i$ は $\mathbb{R}$ の 0 の近傍から $\mathbb{R}^m$ への C^∞ 級写像であることに注意する．ユークリッド空間の間の微分可能写像に関する chain rule から

$$\frac{d}{dt}(\psi\circ c_i)(t)\Big|_{t=0}=D_{\varphi(p)}(\psi\circ\varphi^{-1})\left[\frac{d}{dt}(\varphi\circ c_i)(t)\right]_{t=0}$$

であり，これから $\frac{d}{dt}\psi(c_1(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\psi(c_2(t))\Big|_{t=0}$ が従う．

問題 31　座標近傍 (U,φ) をとり，曲線の同値類 $[c]$ に対して $\frac{d}{dt}\varphi(c(t))|_{t=0}\in\mathbb{R}^m$ を対応させる写像が全単射であることを示せばよい．単射性は定義から明らか．全射性はベクトル $v\in\mathbb{R}^m$ に対して C^∞ 級曲線を $c_v(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+vt)$ と定義すると，$\frac{d}{dt}\varphi(c_v(t))|_{t=0}=v$ であることから．($c_v(t)$ が $t=0$ の近傍で well-defined であり，C^∞ 級であることを確かめる．詳細は略.)

問題 32　微分同相写像 $f\colon S^2\to\widehat{\mathbb{C}}$ を次のように構成する．S^2 の北極点からの立体射影を $\varphi\colon S^2\backslash\{(0,0,1)\}\to\mathbb{R}^2$ とする（問題 6 参照）．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視する写像 $(x,y)\mapsto x+iy$ と合成して写像

$$f\colon S^2\setminus\{(0,0,1)\}\xrightarrow{\varphi}\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$$

を得る．さらに $f(0,0,1)=\infty$ とおくことで，これは

$$f\colon S^2\to\widehat{\mathbb{C}}$$

に拡張される．

　これが微分同相を与えていることを示そう．f が全単射であることは明らかであるから，f および f^{-1} が C^∞ 級であることを示す．S^2 と $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標近傍について確認しておく．$(0,0,1)$ からの立体射影の定める座標は

$$U=S^2\setminus\{(0,0,1)\},\qquad \varphi(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$$

であり，$(0,0,-1)$ からの立体射影の定める座標は

$$V=S^2\setminus\{(0,0,-1)\},\qquad \psi(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)$$

また $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標は

$$(U_1 = \mathbb{C}, \varphi_1 = \mathrm{id}), \qquad (U_2 = \widehat{\mathbb{C}}, \varphi_2(z) = 1/z)$$

により与えられた．f は北極を $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ に写し，南極を $0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に写す．したがって $f(U) = U_1$, $f(V) = U_2$ である．そこで f が C^∞ 級であることを示すには，$\varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$ および $\varphi_2 \circ f \circ \psi^{-1}$ が C^∞ 級であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) &= x + iy \\
\varphi_2 \circ f \circ \psi^{-1}(x, y) &= \varphi_2 \circ f \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right) \\
&= \begin{cases} \varphi_2 \left(\frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ \varphi_2(\infty) & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases} \\
&= x - iy
\end{aligned}$$

よりどちらも C^∞ 級である．逆写像 f^{-1} が C^∞ 級であることを示すには $\varphi \circ f^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$ および $\psi \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}$ が C^∞ 級であることを示せばよい．これらは上に計算した写像の逆写像であり，

$$\begin{aligned}
\varphi \circ f^{-1} \circ \varphi_1^{-1}(x + iy) &= (x, y) \\
\psi \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(x + iy) &= (x, -y)
\end{aligned}$$

で与えられる．これらは明らかに C^∞ 級である．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．$f \colon M \to N$ が C^∞ 級微分同相写像であることの定義は，f が全単射であって f と f^{-1} がどちらも C^∞ 級であることである．f の正しい候補を与えていれば 1 点，さらにその f が微分同相写像であることを定義に基づき正しく示していれば 1 点．後半部分については f(あるいは f^{-1}) が C^∞ 級写像であることを示す条件のうち，(本当はあった方がいいが)「$f(U) \subset V$」に相当する部分は必ずしもできていなくても，全ての必要な座標表示「$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$」が正しく計算できていれば良いものとする．また (もちろん言及するべきだが) f が全単射であることに言及していなくても減点はしない．(この問題ではアトラスが問題文に与えられているので，解きやすくなっているはず．)

問題 33　$U_1 = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid z_2 \neq 0\}$, $U_2 = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid z_1 \neq 0\}$, $V_1 = \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$, $V_2 = \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ とおく．$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみなし，次のように写像を定める：

$$\begin{aligned}
\psi_1 : U_1 \to V_1 \times S^1 \qquad & \psi_1(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|} \right), \\
\psi_2 : U_2 \to V_2 \times S^1 \qquad & \psi_2(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1}{|z_1|} \right).
\end{aligned}$$

ただし ψ_2 の定義において $z_2 = 0$ のときは $z_1/z_2 = \infty \in V_2$ とみなす．このとき ψ_1, ψ_2 は全単射であり，逆写像は

$$\psi_1^{-1}(z, \omega) = \left(\frac{z\omega}{1 + |z|^2}, \frac{\omega}{1 + |z|^2} \right), \quad \psi_2^{-1}(z, \omega) = \left(\frac{\omega}{1 + |1/z|^2}, \frac{z\omega}{1 + |1/z|^2} \right)$$

と与えられることが簡単な計算によって確かめられる．適当に局所座標をとって表示すればこれらが滑らかであることもわかるので，ψ_1, ψ_2 は微分同相写像である．(ここでは証明を省略するが，問題の趣旨からはこのことをまじめに確かめることが求められている．特に $z_2 = 0$ で滑らかであることを示す必要がある．) ここで $f|_{U_i} = p_1 \circ \psi_i$ （$i = 1, 2$, p_1 は第一成分への射影）であることに注意すると，各射影は C^∞ 級であるから f が C^∞ であること

がわかる．また，$f^{-1}(V_i)=U_i$ であるから，1点 $z\in V_i$ のファイバー $f^{-1}(z)$ は微分同相 ψ_i によって $\{z\}\times S^1$ に写され，従って S^1 と微分同相である．

問題 34　存在しない．ここでは基本群についての基本事項は既知であるものとしてその証明を与える．$f\circ s=\mathrm{id}_{S^2}$ なる C^∞ 写像 s が存在したとする．問題 33 の解答と同じ記号のもと，$p_2\circ\psi_i\circ s:V_i\to S^1$ はある C^∞ 級写像であり，これを $S^1=\{|z|=1\}\subset V_1\cap V_2$ に制限したものを $s_i:S^1\to S^1$ とする．これらは可縮な空間 V_i を経由しているので，誘導される写像 $s_{i*}:\pi_1(S^1)\to\pi_1(S^1)$ は零写像である．ところが前解答を用いた具体的な計算により

$$s_2(z)=p_2\circ\psi_2\circ\psi_1^{-1}(z,s_1(z))=zs_1(z)$$

であり，$\deg s_{2*}=\deg s_{1*}+1$ が成立する（deg は写像度を表す）．これは $\deg s_{1*}=\deg s_{2*}=0$ であったことに矛盾する．

問題 35　多項式として $P(z)=0$ のときは明らかであるので，そうでない場合を考える．問題の設定上，$Q(z)\neq 0$ なる $z\in\mathbb{C}$ について等しい関数は同じものと見てよいので，多項式 $P(z),Q(z)$ は共通零点を持たないとしてよい．このとき，$f(z)=\lim_{z'\to z}P(z')/Q(z')$ として f を $\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ へと拡張する．とくに $\{z\in\mathbb{C}\mid Q(z)\neq 0\}$ 上 f は元の f に等しく，$\{z\in\mathbb{C}\mid Q(z)=0\}$ 上 $f(z)=\infty$ である．$Q(z_0)=0$ なる $z_0\in\mathbb{C}$ での f の C^∞ 性は $Q(z)/P(z)$ の $z=z_0$ まわりでの C^∞ 性に帰着されるが，これは $P(z_0)\neq 0$ だから明らかである．$z=\infty$ での C^∞ 性も同様に座標をとって示すことができるが，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の微分同相である Möbius 変換を合成しても C^∞ であるかどうかは変わらないことを用いれば，$\deg P<\deg Q$（従って $f(\infty)=0$）と仮定してよく，幾分証明が楽になる．

問題 36　Möbius 変換が微分同相であることは問題 27 で既に示されているので逆を示す．前解答と同様，$P(z),Q(z)$ は共通零点を持たないとしてよい（当然のことながら，多項式として $P(z)\neq 0$）．$f=P/Q$ が微分同相を定めるとき，$f(z)=0$ なる $z\in\mathbb{C}$ は高々1つ．したがって $P(z)$ は $a(z-b)^k$ $(a,b\in\mathbb{C},k\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ の形の多項式であるが，$k>1$ のとすると，f の $z=b$ における微分について $df_b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=f'(b)=0$（ただしここで値域である $T_{f(b)}\hat{\mathbb{C}}$ を自然に $\mathbb{C}$ と同一視している）となるので f が微分同相であったことに反する．以上により P は高々1次の多項式であることがわかった．f が微分同相であるとき，これと Möbius 変換 $z\mapsto z^{-1}$ との合成，すなわち有理関数 Q/P もまた $\hat{\mathbb{C}}$ 上の微分同相を定めるので，先程と同様にして Q もまた高々1次の多項式である．P と Q は共通零点を持たないと仮定していたので $P(z)/Q(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ の形となり，f は Möbius 変換である．

問題 37　Sard の定理 (C^∞ 級写像の正則値の集合の測度が 0 であること) を使えば直ちに結論が得られる．この場合の初等的な解答としては例えば閉曲線 f の長さ

$$\int_{S^1}|f'(\theta)|d\theta$$

が有限確定値になることを使えばよい．ここで θ は S^1 上の角度座標で，$|f'(\theta)|$ は $\mathbb{R}^3$ の Euclid 内積の定める長さとする．f が全射であれば，S^2 上に 2 次元的に広がった点列をうまくとって，この積分が ∞ に発散することが示せる．

幾何学I　演習問題No.4　(2020年5月20日)

レポート課題No.4　以下の**問題40**と**問題41**を解いて，5月26日17:00までにPandAでオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題38　pを多様体Mの点とし，vを点pでの方向微分とする．定数関数fに対して$v(f)=0$を示せ．

問題39　M, NをC^∞級多様体，$f\colon M\to N$を点$p\in M$の近傍でC^∞級の写像とする．点$f(p)\in N$の近傍で定義されたC^∞級関数φに対して$\varphi\circ f$はpの近傍でのC^∞級関数となるが，実数$v(\varphi\circ f)$を対応させる写像$\varphi\mapsto v(\varphi\circ f)$を$d_pf(v)$と書く．この定義に基づいて次を示せ．

(1) $d_pf(v)$は$f(p)$での方向微分を定める．

(2) 写像$T_pM\ni v\mapsto d_pf(v)\in T_{f(p)}N$は$\mathbb{R}$上線形である．

標準問題

問題40　Mを位相多様体とする．任意の点$p\in M$に対してpを含む開近傍Vでその閉包$\overline{V}$がコンパクトであるものが存在する．これを示せ．(ヒント：Mがハウスドルフであることを証明で使う必要がある．)

問題41　リーマン球面$\widehat{\mathbb{C}}$に対してzを$\mathbb{C}=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{\infty\}$上での標準座標, $w=z^{-1}$を$\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$上の座標とする．また$z=x+\sqrt{-1}y$, $w=s+\sqrt{-1}t$と書く（ここで，x,y,s,tは実数に値をとる座標．）

(1) 点$z\in\mathbb{C}^\times$における接空間$T_z\widehat{\mathbb{C}}$の基底$\{(\frac{\partial}{\partial s})_z, (\frac{\partial}{\partial t})_z\}$をもう一つの基底$\{(\frac{\partial}{\partial x})_z, (\frac{\partial}{\partial y})_z\}$の一次結合として書き表せ．

(2) Möbius変換$f(z)=\frac{z}{a-z}$に対して$z=a$での接写像$d_af\colon T_a\widehat{\mathbb{C}}\to T_\infty\widehat{\mathbb{C}}$を基底$\{(\frac{\partial}{\partial x})_a, (\frac{\partial}{\partial y})_a\}$および$\{(\frac{\partial}{\partial s})_\infty, (\frac{\partial}{\partial t})_\infty\}$を使って行列表示せよ．ただし$a\in\mathbb{C}$.

問題42　$f(x)=f(x_1,\dots,x_m)$を$\mathbb{R}^m$の原点の近傍で定義されたC^∞級関数とする．原点の近傍で定義されたC^∞級関数$h_1(x),\dots,h_m(x)$であって

$$f(x)=f(0)+\sum_{i=1}^m x_ih_i(x)$$

[1] PandAがダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレスiritani@math.kyoto-u.ac.jpに直接送付してください．

を満たすものが存在することを示せ．(ヒント：$\frac{d}{dt}f(tx_1,\ldots,tx_m)$ を積分する．) また，これを繰り返し使って原点の近傍で定義された C^∞ 級関数 $g_{i,j}(x)$, $1 \le i,j \le m$ であって

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \sum_{i,j=1}^{m} x_j x_j g_{ij}(x)$$

を満たすものが存在することを示せ.

問題 43　V を実ベクトル空間とする．基底をとれば $V \cong \mathbb{R}^n$ であるから，V は自然に C^∞ 級多様体と思うことができる．任意の点 $x \in V$ に対して次の写像 $\Phi\colon V \to T_xV$ はベクトル空間の同型であることを示せ．$v \in V$ に対して x を通る曲線 $c_v(t) = x + vt$ を考え，その速度ベクトル $\Phi(v) := \frac{dc_v}{dt}(0) \in T_xV$ を対応させる.

問題 44　$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ の $\mathbb{R}^3$ への包含写像を i で表す.

(1) i は C^∞ 級写像であることを示せ.

(2) 点 $p = (x_0, y_0, z_0)$ に対して $\mathrm{Im}(d_pi\colon T_pS^2 \to T_p\mathbb{R}^3)$ は

$$\left\{ a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} \in T_p\mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \right\}$$

で与えられることを示せ.

発展問題

問題 45　C^∞ 級多様体 M, N の間の写像 $f\colon M \to N$ について，次の (1), (2) は同値であることを示せ.

(1) f は全単射で，$d_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ は全ての点 p において同型

(2) f は微分同相写像である.

問題 46　C^∞ 級写像 $f\colon S^2 \to S^2$ に対して，全ての点 $p \in S^2$ において d_pf は同型であるとする．このとき f は微分同相写像であることを示せ.

幾何学 I　演習問題 No.4 略解

問題 38　定数関数 $f_1 \equiv 1$ について，方向微分の定義（Leibniz 則）から，$v(f_1) = v(f_1 \cdot f_1) = 2v(f_1)$. 従って $v(f_1) = 0$ であり，方向微分の $\mathbb{R}$-線型性から任意の定数関数 f について $v(f) = 0$.

問題 39

(1) 点 p での方向微分 v の 3 つの性質は次の通りである．φ_1, φ_2 を p の周りで定義された C^∞ 級関数とするとき，

(a) φ_1, φ_2 が点 p のある近傍で一致するならば $v(\varphi_1) = v(\varphi_2)$,

(b) 実数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ について $v(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = v(\varphi_1) + \mu v(\varphi_2)$,

(c) $v(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1(p) \cdot v(\varphi_2) + v(\varphi_1) \cdot \varphi_2(p)$.

この 3 つの性質を $d_pf(v)$ に対して確かめる．

(a) φ_1, φ_2 が $f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数で $f(p)$ の十分小さい近傍 U で一致するものとする．このとき $\varphi_1 \circ f$ および $\varphi_2 \circ f$ は $f^{-1}(U)$ で一致する.（$f^{-1}(U)$ が p の近傍であることは f が点 p で連続であることから従う．また，点 p で C^∞ 級ならば点 p で C^∞ 級であることは授業で示した.）従って $v(\varphi_1 \circ f) = v(\varphi_2 \circ f)$.

(b) φ_1, φ_2 を $f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$v((\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) \circ f) = v(\lambda\varphi_1 \circ f + \mu\varphi_2 \circ f) = \lambda v(\varphi_1 \circ f) + \mu v(\varphi_2 \circ f)$$

(c) φ_1, φ_2 を $f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数とする．

$$\begin{aligned} v((\varphi_1 \cdot \varphi_2) \circ f) = v((\varphi_1 \circ f) \cdot (\varphi_2 \circ f)) &= (\varphi_1 \circ f)(p) \cdot v(\varphi_2 \circ f) + v(\varphi_1 \circ f) \cdot (\varphi_2 \circ f)(p) \\ &= \varphi_1(f(p)) \cdot v(\varphi_2 \circ f) + v(\varphi_1 \circ f) \cdot \varphi_2(f(p)) \end{aligned}$$

(2) $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in T_pM$ とする．$f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数 φ に対して，

$$\begin{aligned} (d_pf(av + bw))(\varphi) &= (av + bw)(\varphi \circ f) = av(\varphi \circ f) + bw(\varphi \circ f) \\ &= a((d_pf)(v))(\varphi) + b((d_pf)(w))(\varphi) \end{aligned}$$

従って $d_pf(av + bw) = ad_pf(v) + bd_pf(w)$.

問題 40　点 $p \in M$ の座標近傍 (U, φ) をとる．M の次元を m とすると，$U' := \varphi(U)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．$\varphi(p) \in U'$ より，ある $\epsilon > 0$ に対して $\varphi(p)$ を中心とする半径 2ϵ の開球体 $B_{2\epsilon}(\varphi(p)) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - \varphi(p)| < 2\epsilon\}$ は U' に含まれる．$V' = B_\epsilon(\varphi(p))$ とおくと，V' の閉包 $\overline{V'}$ は半径 ϵ の閉球体であって U' に含まれるコンパクト集合である．ここで $V = \varphi^{-1}(V')$, $K = \varphi^{-1}(\overline{V'})$ とおく．φ は同相写像であるから V は U の開集合であり（とくに M の開集合でもある），K はコンパクト集合．M はハウスドルフであるから K は閉集合．従って $\overline{V} \subset K$ である．コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトなので，$\overline{V}$ はコンパクトである．以上により問題の開近傍が存在することが示された.（さらに $K = \overline{V}$ であることも言える.）

注意：この証明で M がハウスドルフであることは必ず使う．そうでなければ反例がある．ハウスドルフではない位相多様体の例としては $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$ に次の同値関係を入れて割ったものがある．

$$(x, n) \sim (y, m) \iff x = y \neq 0 \text{ または } (x = y = 0 \text{ かつ } n = m)$$

これは $\mathbb{R}$ の 2 つのコピーを原点を除いて張り合わせたものであり，2 つの原点がある．2 つの原点が分離できないのでハウスドルフではないが，ハウスドルフ以外の位相多様体の条件を満たす．同様に $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ に同値関係

$$(x,n)\sim(y,m) \iff x=y\neq 0 \text{ または } (x=y=0 \text{ かつ } n=m)$$

を入れてこれで割った位相空間 M もハウスドルフ以外の条件を満たす．この位相空間において点 $[(0,1)]\in M$ の開近傍 V でその閉包 $\overline{V}$ がコンパクトではないものは存在しない．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．基本的には正しく議論できていれば 2 点で，そうでなければ 0 点．特にハウスドルフ性を使っていない答案は 0 点とする．それ以外の軽微なミスは個別に判断する．

問題 41

(1) 変数変換を実座標で書くと

$$s(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad t(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

また逆変換は

$$x(s,t)=\frac{s}{s^2+t^2},\quad y(s,t)=-\frac{t}{s^2+t^2}$$

で与えられる．従って

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_z &= \frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z=\frac{t^2-s^2}{(s^2+t^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{2st}{(s^2+t^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z\\
&=-\Re(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z-\Im(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z &= \frac{\partial x(s,t)}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{y(s,t)}{t}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z=-\frac{2st}{(s^2+t^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{t^2-s^2}{(t^2+s^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z\\
&=\Im(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z-\Re(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z
\end{aligned}$$

ここで $\Re(x)$ は x の実部，$\Im(x)$ は x の虚部を表す．(あるいは以下の (2) のように $w\mapsto z=w^{-1}$ を複素関数の意味で微分して計算することもできて，そちらの方が計算は容易である．)

(2) $z=a$ の近傍で写像 f を定義域側の座標 z，値域側の座標 w により表示すると，

$$z\mapsto w=w(z)=\frac{a-z}{z}=\frac{a}{z}-1$$

となる．この関数は複素微分可能でありその意味で

$$\frac{dw}{dz}(z)=-\frac{a}{z^2}$$

複素微分可能性の定義から，$w(z)$ を (x,y) の関数と思うとき，

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a)=\frac{dw}{dz}(a)=-\frac{1}{a},\quad \frac{\partial w}{\partial y}(a)=\sqrt{-1}\frac{dw}{dz}(a)=-\frac{\sqrt{-1}}{a}.$$

これを実部，虚部に分けると Jacobi 行列となり，

$$\begin{aligned}
d_af\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_a\right)&=-\Re\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_\infty-\Im\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\infty\\
d_af\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_a\right)&=-\Re\left(\frac{\sqrt{-1}}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_\infty-\Im\left(\frac{\sqrt{-1}}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\infty
\end{aligned}$$

したがって求める行列は

$$\begin{pmatrix} -\Re(1/a) & \Im(1/a) \\ -\Im(1/a) & -\Re(1/a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Re(a)/|a|^2 & -\Im(a)/|a|^2 \\ \Im(a)/|a|^2 & -\Re(a)/|a|^2 \end{pmatrix}$$

採点基準　(1)1 点，(2)1 点．各々，計算方法が正しく，かつ，結果が正しくて 1 点．計算結果の符号のミスは (各問ごとに)2 箇所までは減点しない．(2) で a を実数と (間違って) 仮定しているものは 0 点．また行列を転置行列にしているものは，あまり望ましくないが減点しない．(普通，行列は縦ベクトルに左から作用すると考えますが，横ベクトルに右から作用すると考える人もいるかもしれないので．)

問題 42　ヒントにあるように $\frac{d}{dt}f(tx) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ の両辺を積分して，

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$$

$h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$ とおくとき，これが C^∞ 級になるのは簡単な解析の演習である (積分のパラメータに関する微分)．さらに $h_i(x)$ にこの結果を適用すると，$h_i(x) = h_i(0) + \sum_{j=1}^m g_{i,j}(x)x_j$，$g_{i,j}$ は C^∞ 級，と書ける．これから

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x_i h_i(0) + \sum_{i,j} g_{i,j}(x)x_i x_j$$

の形に書ける．x_i で微分して $x = 0$ とおくことにより $h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ が分かる．

問題 43　V の基底を $e_1, \ldots, e_n$ とし，ベクトル空間の同型 $V \cong \mathbb{R}^n$ を $\sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ で定める．これは V の座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ を定める．$(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x$ は T_xV の基底であるので，写像 $\Phi\colon V \to T_xV$ は e_i を $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$ に写す写像であることを確かめれば十分である．

問題 44　(1) i の局所座標表示がすべて C^∞ 級であることを示せばよい．例えば S^2 をアトラス $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ で覆う．ここで $U_i^\pm = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : \pm x_i > 0\}$ であり，$\varphi_i^\pm$ は i 成分以外の成分への射影で定まるものである．例えば $\varphi_1^+(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$ である．U_1^+ 上での i の局所座標表示は

$$i \circ (\varphi_1^+)^{-1}(x_2, x_3) = (\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3)$$

であり，これは (各成分が) $\{(x_2, x_3) : x_2^2 + x_3^2 < 1\} = \varphi_1^+(U_1^+)$ 上の C^∞ 級写像．

(2) i の微分 di は，i の局所座標表示の Jacobi 行列で与えられたことを思い出すと，例えば U_1^+ の点 $p = (x_1, x_2, x_3)$ では $d_p i$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}}{\partial x_2} & \frac{\partial\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}}{\partial x_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} & -\frac{x_3}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1} & -\frac{x_3}{x_1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．このことから $d_p i$ の像が与えられたものになることは容易に見て取れる．

幾何学 I　演習問題 No.5　(2020 年 5 月 27 日)

レポート課題 No.5　以下の**問題 49** と**問題 50** を解いて，6 月 2 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 47　M, N, Q を多様体，$f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ を C^∞ 級写像とする．$p \in M$, $q = f(p) \in N$ に対して，微分に対する次の chain rule が成り立つことを示せ．

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f.$$

問題 48　$f\colon M \to N$ を C^∞ 級微分同相写像とする．M の次元と N の次元は等しいことを示せ．

問題 49　M を m 次元多様体，(U, φ) を M の座標近傍とする．ただし $\varphi\colon U \to U'$ は M の開集合 U と $\mathbb{R}^m$ の開集合 U' の間の同相写像である．

(1) U' のコンパクト集合 A に対して $\varphi^{-1}(A)$ は M のコンパクト集合であるか？正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(2) U' の閉集合 A に対して $\varphi^{-1}(A)$ は M の閉集合であるか？正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

標準問題

問題 50　M, N を C^∞ 級多様体, $f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．写像 f が $p \in M$ で沈めこみであるとき，p の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ および $f(p)$ の座標近傍 $(V; y_1, \dots, y_n)$ が存在して $x_1(p) = \cdots = x_m(p) = 0$, $y_1(f(p)) = \cdots = y_n(f(p)) = 0$，$f(U) \subset V$ であり，f の座標表示は

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

で与えられる．(沈めこみの条件から $n \leq m$ であることに注意せよ．) 逆関数定理を使ってこれを証明せよ．

問題 51　陰関数定理を仮定して逆関数定理を証明せよ．

問題 52　包含写像 $i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ははめ込みであることを示せ．このことから S^n の各点での接空間は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間と見なせることがわかる (なぜか？).

---

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 53　写像 $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $f(z) = z^2$ で定義する．f の微分はすべての点で同型であるが，f は C^∞ 級微分同相ではないことを示せ．

問題 54 [問題 45 再掲]　多様体の間の C^∞ 級写像 $f\colon M \to N$ が全単射で，各点 $p \in M$ において $d_p f\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が同型であれば，f は微分同相写像であることを示せ．(ヒント：逆関数定理を使う．)

問題 55　C^∞ 級はめこみ $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ は存在するか．存在すれば例を与え，存在しなければそのことを証明せよ．

<u>発展問題</u>

問題 56　問題 33 に与えた写像 $f\colon S^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ を考える．この写像は $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ と見なしたとき，

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} & z_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義された．この写像が沈めこみであることを示せ．(ヒント：各点 $p \in S^3$ に対して，$\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級写像 $s\colon U \to S^3$ でその像は p を含み，$f \circ s = \mathrm{id}$ を満たすものを見つけることができればよい．)

問題 57　逆関数定理の証明を次の手順で行ってみよ．([松本] にある証明とは少し異なる．) U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像で点 $p \in U$ での Jacobi 行列 $(Jf)_p$ が正則なものとする．

(i) まず適当な座標変換によって $p = f(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ は原点，$(Jf)_p$ は単位行列と仮定してもよいことを示す．

(ii) $g_y(x) = y + x - f(x)$ とおく．$\epsilon > 0$ が存在して $|y| \leq \epsilon/2$ ならば g_y は半径 ϵ の閉球体 $\overline{B_\epsilon(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \epsilon\}$ で定義されて $g_y(\overline{B_\epsilon(0)}) \subset \overline{B_\epsilon(0)}$ が成り立つ．

(iii) さらに $\epsilon > 0$ を小さくとれば，$g_y\colon \overline{B_\epsilon(0)} \to \overline{B_\epsilon(0)}$ は縮小写像にとることが出来る．すなわち，定数 $0 < k < 1$ が存在して $|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$, $(\forall x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)})$．このことから，縮小写像の原理を適用して，$y \in \overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ の逆像 $f^{-1}(y)$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 内に一意に定まることを示す．(ヒント：$g_y(x_1) - g_y(x_2) = \int_0^1 [\frac{d}{dt} g_y(tx_1 + (1-t)x_2)]dt$．)

(iv) $y \mapsto f^{-1}(y)$ が連続であることを示す．

(v) f^{-1} は微分可能であることを示し，$J(f^{-1})$ を計算する．

(vi) f^{-1} が C^∞ 級であることを示す．

注：以上の縮小写像の原理を利用した証明は無限次元の Banach 空間にも一般化できる．

幾何学 I　演習問題 No.5 略解

問題 47　点 p での接空間 T_pM を点 p を通る曲線の同値類と考える見方で示そう．$c\colon(-\epsilon,\epsilon)\to M$ を p を通る $(c(0)=p)M$ 上の C^∞ 級曲線とする．d_pf は M の曲線 c の同値類を $f\circ c$ の同値類に写す．さらに $d_{f(p)}g$ は曲線 $f\circ c$ の同値類を $g\circ(f\circ c)=(g\circ f)\circ c$ の同値類に写す．これは曲線 c の同値類の $d_p(g\circ f)$ による像である．

問題 48　$p\in M$ について，$df: T_pM\to T_{f(p)}N$ 及び $d(f^{-1}): T_{f(p)}N\to T_pM$ は互いに逆写像の関係にある線形写像であり，同型である．特に T_pM と $T_{f(p)}N$ の次元は等しく，M と N の次元も等しい．

問題 49

(1) 正しい．φ^{-1} は同相写像であり (特に連続写像なので)，コンパクト集合 A の像 $\varphi^{-1}(A)$ はコンパクト．

(2) との比較のため，もう少し丁寧に論証するならば次の通り．上で示したのは $\varphi^{-1}(A)$ は U の部分位相空間としてコンパクト，ということである．ここで $\varphi^{-1}(A)$ に U からの相対位相を入れたものと $\varphi^{-1}(A)$ に M からの相対位相を入れたものは位相空間として一致する (なぜなら U には M からの相対位相が入っているから)．従って，結局 $\varphi^{-1}(A)$ は M の部分位相空間としてもコンパクトである．

(2) 反例がある．例えば $M=\mathbb{R}$, $U=U'=(0,1)$，$\varphi\colon U\to U'$ を恒等写像，$A=U'$ とする．A は U' 全体であるから U' の閉集合であるが，$\varphi^{-1}(A)=U$ は M の閉集合ではない．他にも，$A=[\frac{1}{2},1)$ としてもよい．

φ は連続なので，当然 $\varphi^{-1}(A)$ は U の閉集合である．U の閉集合だからといって M の閉集合とは限らない，というのがポイント．

注 :「コンパクト集合の連続写像による像はコンパクト」，また，「閉集合の連続写像による逆像は閉集合」という事実とは一見異なるようにみえますが，矛盾ではありません．

採点基準　2 点．(1) と (2) で 1 点ずつ．(1) は φ^{-1} が同相 (あるいは φ が同相，あるいは φ^{-1} が連続) であるから，という理由が説明されていれば可．(あるいはコンパクトの定義に戻って正しく証明しているのももちろん可．) (2) は正しい反例が与えられていれば OK．(反例であることの証明が間違っていても，(2) で減点はしない．)

問題 50　まず f は C^∞ 級写像であるから，p の座標近傍 $(U;x_1,\dots,x_m)$ および $f(p)$ の座標近傍 $(V;y_1,\dots,y_n)$ であって $f(U)\subset V$ であるものが取れる．また座標を平行移動することにより $x_i(p)=0$, $y_j(f(p))=0(\forall i,j)$ と仮定してよい．

座標によって U,V をユークリッド空間の開集合，$f\colon U\to V$ とみなすことにする．沈めこみの仮定から $(Jf)_0$ の表す線形写像は全射である．即ち $(Jf)_0$ のランクは n であり，$(Jf)_0$ の n 個の行ベクトルは一次独立．これに適当なベクトル $\mathbf{a}_{n+1},\dots,\mathbf{a}_m$ を加えて $\mathbb{R}^m$ の基底とすることができる．つまり

$$\begin{pmatrix}(Jf)_0\\ \mathbf{a}_{n+1}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m\end{pmatrix}\tag{1}$$

が正則行列となるような行ベクトル $\mathbf{a}_{n+1},\dots,\mathbf{a}_m$ をとることができる．C^∞ 級写像 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^m$ を

$$\varphi(x_1,\dots,x_m)=\begin{pmatrix}f(x_1,\dots,x_m)\\ (\mathbf{a}_{n+1},\mathbf{x})\\ \vdots\\ (\mathbf{a}_m,\mathbf{x})\end{pmatrix}$$

で定める．ただし $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ で $(\cdot,\cdot)$ は標準的なスカラー積である．$\varphi(0) = 0$ に注意する．φ の原点での Jacobi 行列 $(J\varphi)_0$ は上の式 (1) で与えられるので正則である．逆関数定理により原点の開近傍 $W \subset U$, $W' \subset \mathbb{R}^m$ が存在して $\varphi(W) = W'$ であり $\varphi\colon W \to W'$ は C^∞ 級同相写像である．$\mathbf{x} \in W'$ に対して

$$\mathbf{x} = \varphi \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}_{n+1}, \varphi^{-1}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_m, \varphi^{-1}(\mathbf{x})) \end{pmatrix}$$

両辺の最初の n 成分を見れば

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

が得られる．これは座標 (W, φ) に関して $f|_W$ を表示したものである．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．(この解答以外にも方針はあるだろうが[1]) 正しい方針でできていれば開近傍の取り方など細かいところは大目に見たい．授業では逆関数定理と陰関数定理は同値であることを説明したので，逆関数定理ではなく，陰関数定理から導いている解答があったとしても OK とする．基本的には 2 点か 0 点で，部分点を出すかどうかは個別に判断する．

問題 51　$\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ が $\det((Jf)_0) \neq 0$ を満たすとする．$0 \in U$ かつ $f(0) = 0$ として，0 の近傍で逆関数があることを示そう．

$g(x, y) = x - f(y)$ を考える．これは $\mathbb{R}^n \times U$ 上で定義された $\mathbb{R}^n$ 値関数で，

$$\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0,0)\right) \neq 0$$

を満たす．したがって陰関数定理から $0 \in \mathbb{R}^n$ の開近傍 V, W および C^∞ 級写像 $\varphi\colon V \to W$ が存在して，$W \subset U$ であり，$(x, y) \in V \times W$ に対して

$$g(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

このとき φ が f の逆関数 (逆写像) になっている．$V' = f^{-1}(W) \cap V$ とおくとき，V' は 0 の開近傍であり，$f(V') \subset W$．また $\varphi(V') \subset W$ は明らかである．上のことから $(x, y) \in V' \times W$ に対して

$$x = f(y) \iff y = \varphi(x)$$

ゆえ f と φ は互いに逆写像で $f|_{V'}\colon V' \to W$ は微分同相写像.

問題 52　S^n を問題 15 のチャート $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ で覆う．例えば U_{n+1}^+ での包含写像 i の座標表示は

$$i \circ (\varphi_{n+1}^+)^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}\right)$$

である．このヤコビ行列が単射になることは容易にチェックできる．

$d_p i\colon T_pS^n \to T_p\mathbb{R}^{n+1}$ は単射であるので，T_pS^n は $T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間と見なすことができる．(ベクトル空間 V に対して $T_xV = V$ であることは問題 43 で示した．)

問題 53　$f(z) = f(-z)$ であり，f は単射でないので当然微分同相写像ではない．f の微分が同型になることは容易.

問題 54　f は全単射なので逆写像 f^{-1} が存在する．逆関数定理により，f^{-1} は C^∞ 級であることが分かる．(各点での局所的な議論で分かる．詳細略．)

[1] [松本幸夫] の定理 10.3 の証明はすこし違う方針で行っているようである．

問題 55　存在しない．$f = (f_1, f_2)$ とおく．ただし f_i は S^2 上の C^∞ 級関数．S^2 はコンパクトなので f_1 はどこかの点 $p \in S^2$ で最大値をとる．そのような点で f_1 の座標表示の偏微分係数は全て消えている．従ってそのような点で f の座標表示のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

の形であり，正則でない．つまり f ははめ込みでない．

問題 56　$p = (z_1, z_2) \in S^3$ で沈めこみであることを示そう．$z_2 \neq 0$ とする．写像 $g\colon \mathbb{C} \to S^3$ を

$$g(z) = \frac{1}{|z_2|\sqrt{1+|z|^2}}(z_2 z, z_2)$$

とおくとき，$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ より $g(z_1/z_2) = (z_1, z_2) = p$ である．また g は明らかに C^∞ 級写像であって $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$．これから $d_p f \circ d_{z_1/z_2} g = \mathrm{id}$．従って $d_p f$ は全射である．

次に $z_2 = 0$ とする．このとき $|z_1| = 1$, $f(p) = \infty$ である．∞ の周りの $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標近傍 $(U_2 = \{\infty\} \cup \mathbb{C}^\times, \varphi_2)$ を $\varphi_2(z) = 1/z$ で定義する．また座標 $\varphi_2(z)$ を w で表すことにする．写像 $h\colon U_2 \to S^3$ を (座標 w を用いて)

$$h(w) = \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}(z_1, z_1 w)$$

と定める．h は C^∞ 級写像で，$h(0) = p$, $f \circ h = \mathrm{id}_{U_2}$ を満たすから，前半と同じ理由により $d_p f$ が全射であることが分かる．

問題 57

(i) 座標の平行移動により $p = 0$, $f(p) = 0$ としてよい．また $f(x)$ を $(Jf)_p^{-1} f(x)$ で置き換えて $(Jf)_p = E_n$ と仮定できる．

(ii) ある $\delta > 0$ に対して $f(x)$ は $B_\delta(0)$ で定義されているとしてよい．Taylor の定理から

$$f(x) = (Jf)_0 x + o(|x|) = x + o(|x|)$$

であり，特にある $0 < \epsilon < \delta$ が存在して $|f(x) - x| \leq \frac{1}{2}|x|$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 上で成立する．$|y| \leq \frac{\epsilon}{2}$ とすると，$x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して $g_y(x)$ は定義され，

$$|g_y(x)| = |y - f(x) + x| \leq |y| + |x - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{|x|}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

つまり $g_y\colon \overline{B_\epsilon(0)} \to \overline{B_\epsilon(0)}$ を定める．

(iii) ヒントより

$$\begin{aligned}
|g_y(x_1) - g_y(x_2)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} g_y(tx_1 + (1-t)x_2) dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 (E_n - (Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1 - x_2) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| (E_n - (Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1 - x_2) \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left\| (E_n - (Jf)_{tx_1+(1-t)x_2}) \right\| |x_1 - x_2| dt
\end{aligned}$$

f は C^1 級で $(Jf)_0 = E_n$ だから，ϵ を小さく取り直せば $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して

$$\|E_n - (Jf)_x\| \leq \frac{1}{2}$$

となる．ここで $x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して上の計算から

$$|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq \int_0^1 \frac{1}{2}|x_1 - x_2|dt = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

すなわち g_y は縮小写像．縮小写像の原理から $|y| \leq \epsilon/2$ のとき，$g_y(x) = x$ を満たす $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ が一意に存在する．($B_\epsilon(0)$ は完備距離空間であることを使った．)

(iv) $y_1, y_2 \in \overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ とし，$x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ を $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}|y_1 - y_2| = |f(x_1) - f(x_2)| &\geq |x_1 - x_2| - |f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| - |g_0(x_1) - g_0(x_2)| \\ &\geq |x_1 - x_2| - \frac{1}{2}|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|\end{aligned}$$

ここで (iii) で得た評価を使った．これは f^{-1} が連続であることを示す．

(v) $y \in B_{\epsilon/2}(0)$ をとる．十分小さい $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $x = f^{-1}(y)$, $x + b(a) = f^{-1}(y + a)$ とおく．($x, x + b(a) \in \overline{B_\epsilon(0)}$．) ここで (iv) より $|b(a)| \leq 2|a|$ であることに注意する．f は全微分可能なので，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|b| < \delta$ のとき

$$|f(x + b) - f(x) - (Jf)_x b| \leq \epsilon|b|$$

従って $b = b(a)$ とおけば，$|a| < \delta/2$ のとき $|b(a)| \leq 2|a| < \delta$ であって，

$$|f(x + b(a)) - f(x) - (Jf)_x b(a)| \leq \epsilon|b(a)| \leq 2\epsilon|a|$$

すなわち，

$$|a - (Jf)_x(f^{-1}(y + a) - f^{-1}(y))| \leq 2\epsilon|a|$$

がわかる．これを書き換えると

$$|f^{-1}(y + a) - f^{-1}(y) - ((Jf)_x)^{-1}a| \leq 2\epsilon\|((Jf)_x)^{-1}\| \cdot |a|$$

これは f^{-1} は y で全微分可能であり，$(Jf^{-1})_y = ((Jf)_x)^{-1}$ であることを示す．

(vi) 逆関数を $h = f^{-1}$ とおく．$(Jh)_y = ((Jf)_{h(y)})^{-1}$ より h の偏微分係数は逆行列の係数を与える有理関数 $R_{jk}(\{a_{i,j}\})$ を用いて

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_k}(y) = R_{jk}\left(\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(h(y))\right\}\right)$$

の形に書けることが分かる．したがって h の偏微分係数は全て連続であり，h は C^1 級．この式から帰納的に，h は r 階偏微分可能で，その偏微分係数は f の r 階までの偏微分係数 $Jf, J^2f, \ldots, J^rf$ と h の $r-1$ 階までの偏微分係数 $Jh, \ldots, J^{r-1}h$ の有理関数として表されることが示せる．

$$\frac{\partial^r h_j}{\partial y_{k_1} \cdots \partial y_{k_r}}(y) = R_{j,k_1,\ldots,k_r}(Jf(h(y)), \ldots, J^rf(h(y)), Jh(y), \ldots, J^{r-1}h(y))$$

従って $h = f^{-1}$ は C^∞ 級．

幾何学 I　演習問題 No.6 (2020 年 6 月 2 日)

レポート課題 No.6　以下の**問題 61 と問題 63** を解いて，6 月 9 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 58 X をコンパクト位相空間，Y をハウスドルフ位相空間とする．連続写像 $f\colon X \to Y$ が全単射であれば，同相写像であることを示せ．

問題 59 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,y) = (x, xy)$ で定める．f の臨界点の集合および臨界値の集合を求めよ．また f の像を決定せよ．

問題 60 授業では $\mathbb{RP}^n$ の開集合 $U_i = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ に対して座標 $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ を $\varphi_i([x_1, \ldots, x_{n+1}]) = (\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$ で定義した．座標 φ_i が連続写像であることを証明せよ．

標準問題

問題 61 次の写像ははめ込みか，埋め込みか．理由をつけて答えよ．

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1})$.

(2) $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (x^2, y^2, xy)$.

(3) $h\colon (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2$, $h(t) = (1-t^2, t-t^3)$.

問題 62 $f\colon M \to N$ は点 p ではめ込みであるとする．このとき p の開近傍 $U \subset M$ が存在して $f|_U\colon U \to N$ は埋め込みである．これを示せ．(ヒント：前回示したはめ込み写像の局所座標表示に関する定理を使う．)

問題 63 L, N を C^∞ 級多様体，$f\colon L \to N$ を C^∞ 級埋め込みとする．像 $f(L)$ は N の部分多様体になることを証明せよ．ただし，部分集合 $S \subset N$ が (l 次元) 部分多様体であるとは任意の $s \in S$ に対して N の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ であって $S \cap U = \{p \in U : x_{l+1}(p) = \cdots = x_n(p) = 0\}$ を満たすものが存在することである．(ヒント：前回示したはめ込み写像の局所座標表示に関する定理を使う．)

問題 64 N を n 次元 C^∞ 級多様体，$L \subset N$ を l 次元 C^∞ 級部分多様体とする．授業では細部を省略した，L が自然に C^∞ 級多様体の構造を持つことの証明，を完成させよ．つまり

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

(1) 各点 $p \in L$ に対し，L が部分多様体であることの定義から，p を含む N の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ で

$$L \cap U = \{a \in U : x_{l+1}(a) = \cdots = x_n(a) = 0\}$$

を満たすものが存在する．このとき $(U \cap L; x_1, \ldots, x_l)$ は L の座標近傍になることを示せ.

(2) このようにして与えられる座標近傍の間の座標変換が C^∞ 級であることを示せ.

問題 65 $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ 上の関数 $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) = xy$ で定める．$f(x, y, z)$ の臨界点を全て求めよ.

問題 66 M を m 次元 C^∞ 級多様体，N を n 次元 C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする.

(1) 部分集合 $F \subset M$ が閉である必要十分条件は M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して，任意の $\alpha \in A$ について $F \cap U_\alpha$ が U_α の閉集合であることである．これを示せ.

(2) 0 以上の整数 r に対して $S_r = \{p \in M : \operatorname{rank} d_pf \leq r\}$ とおく．S_r は M の閉集合であることを示せ.

注：(2) から，f の臨界点の集合 S_{n-1} は閉集合であることが分かる.

問題 67 $\mathbb{RP}^n$ がハウスドルフ位相空間であることを証明せよ．([松本幸夫] 命題 11.2 の証明は厳密ではない．厳密な証明を与えること.)

<u>発展問題</u>

問題 68 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して写像 $k_\alpha\colon \mathbb{R} \to T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を $k_\alpha(t) = [t, \alpha t]$ で定める．$\alpha \notin \mathbb{Q}$ のとき，次を示せ.

(1) k_α は単射であって，その像は T^2 のなかで稠密である.

(2) k_α は埋め込みではない．すなわち $k_\alpha\colon \mathbb{R} \to k_\alpha(\mathbb{R})$ は同相写像ではない．ただし $k_\alpha(\mathbb{R})$ には T^2 からの相対位相を入れる.

問題 69 M, N を C^∞ 級多様体．$L \subset N$ を C^∞ 級部分多様体とする．C^∞ 級写像 $f\colon M \to N$ が L に横断的 (transversal) であるとは，任意の点 $p \in M$ に対して，$f(p) \in L$ ならば

$$\operatorname{Im}(d_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N) + T_{f(p)}L = T_{f(p)}N$$

が成立することである．(このとき $f \pitchfork L$ と書く．) ここで，包含写像 $i\colon L \to N$ の微分 $d_{f(p)}i\colon T_{f(p)}L \to T_{f(p)}N$ により，部分多様体 L の接空間 $T_{f(p)}L$ は $T_{f(p)}N$ の部分空間とみなしている．f が L に横断的であるならば $f^{-1}(L)$ は M の部分多様体であることを証明せよ．

問題 70 M を m 次元 C^∞ 級多様体，N を n 次元 C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．任意の点 $p \in M$ に対して $\operatorname{rank} d_pf$ が一定の値 r をとるとする．$q \in N$ に対して $f^{-1}(q)$ は (空でなければ) M の $m-r$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．[2020 年 7 月 21 日問題訂正]

幾何学 I　演習問題 No.6 略解

問題 58 f^{-1} が連続であることを言えば良い．このためには X の閉集合 F に対して $f(F)$ が Y の閉集合であることを示せばよい．X はコンパクトなので，その任意の閉部分集合 F はコンパクトである．f は連続なので，コンパクト集合 F の像 $f(F)$ はコンパクトである．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉であるから，$f(F)$ は閉集合である．

問題 59 f のヤコビ行列は

$$Jf = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

であり，Jf が全射でないのは $\det Jf = 0 \iff x = 0$ である．したがって臨界点の集合は y 軸 $\{(0, y)\}$ である．また臨界値の集合はこの像であって 1 点集合 $\{(0, 0)\}$．f の像は $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

問題 60 $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ を自然な射影，$\tilde{U}_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\} = \pi^{-1}(U_i)$ とおく．$\tilde{U}_i$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合である．写像 $\tilde{\varphi}_i\colon \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n$ を $\tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$ によって定めると，これは連続．与えられた座標 φ_i は $\varphi_i \circ \pi = \tilde{\varphi}_i$ を満たす．したがって $\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対して，$\pi^{-1}(\varphi_i^{-1}(U)) = (\varphi_i \circ \pi)^{-1}(U) = \tilde{\varphi}_i^{-1}(U)$ は開集合．商位相の定義から $\varphi_i^{-1}(U)$ は開集合である．つまり φ_i は連続である．(問題 7 と比較せよ．)

問題 61 (1) f ははめ込みであり，埋め込みである．

はめ込みであること：f の微分は

$$f'(t) = \left(\frac{4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \right)$$

であり，$f'(t) = 0$ となることはないから．

埋め込みであること：f は $\mathbb{R}$ と $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1, 0)\}$ の間の同相写像を与えることを示そう．$f(\mathbb{R}) \subset R$ は明らかである．写像 $\phi\colon R \to \mathbb{R}$ を

$$\phi(x, y) = \frac{y}{x-1}$$

と定めると，ϕ は明らかに連続．また $f \circ \phi = \mathrm{id}_R$, $\phi \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ であることが確かめられる．よって f の像は R であり，f は像との間の同相写像となる．

(2) はめ込みであるが，埋め込みではない．

はめ込みであること：g のヤコビ行列は

$$Jg = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

であり，この 2×2 小行列式

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = -2y^2$$

のいずれかはゼロではない．したがって Jg の階数は 2 である．

埋め込みでないこと：g は $g(x, y) = g(-x, -y)$ を満たし，単射ではないから．

(3) はめ込みであるが，埋め込みではない．

はめ込みであること：$h'(t) = (-2t, 1-3t^2)$ はゼロになることはないから．

埋め込みでないこと：h は単射であることは容易に確かめられる．しかし h は埋め込みではない．実際，

$$\lim_{n\to\infty} h(1-\tfrac{1}{n}) = (0,0) = h(-1)$$

であるが，$(-\infty, 1)$ における点列 $1-\frac{1}{n}$ は -1 に収束しない．これは h の逆写像が連続でないことを示している．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 3 点．(1)-(3) 各々1 点づつ．各問題について，はめ込みか，埋め込みかを正しく判定しており，またその理由を簡単に述べて 1 点．理由の採点基準については以下の通りとする．はめ込みであることの理由については，微分が単射であることを述べているだけで OK とし，議論の詳細は減点しない．(1) が埋め込みであることの証明は（もちろん証明してほしいが）していなくても減点対象としない．(2) が埋め込みでないこと：単射でないという理由が述べられているかどうかを見る．(3) が埋め込みでないこと：逆写像が連続でない理由が正しく述べられているかどうか．(これは証明まで見る．)

問題 62 はめ込み写像の局所座標表示に関する定理から，p の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ および $f(p)$ の座標近傍 $(V; y_1, \dots, y_n)$ が存在して $f(U) \subset V$ であり，f は $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ の形に座標表示される．このとき，$f|_U$ は像への同相写像であることを示そう．まず，$f|_U$ は明らかに単射である．$(x_1, \dots, x_m) = \varphi$, $(y_1, \dots, y_n) = \psi$ とかく．また $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を最初の m 成分への射影とする．$f|_U\colon U \to f(U)$ の逆写像 $g\colon f(U) \to U$ は合成

$$f(U) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi^{-1}} U$$

で与えられる．ここで，$f(U) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^m$ の像が φ^{-1} の定義域 $\varphi(U)$ に含まれていることを使っている．従って g は連続である．すなわち $f|_U\colon U \to f(U)$ は同相写像であることが示された．

問題 63 はめ込み写像の局所的性質から，任意の点 $p \in L$ に対して L の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_l)$ および N の座標近傍 $(V; y_1, \dots, y_n)$ であって次の性質を満たすものが存在する．$x_1(p) = \cdots = x_l(p) = 0$, $y_1(f(p)) = \cdots = y_n(f(p)) = 0$, $f(U) \subset V$, f の座標表示は $(x_1, \dots, x_l) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_l, 0, \dots, 0)$ で与えられる．また，$f\colon L \to f(L)$ は $f(L)$ の相対位相に関して同相写像であるから，$f(U)$ は $f(L)$ の相対位相に関する開集合である．即ち，開集合 $W \subset N$ であって $W \cap f(L) = f(U)$ となるものが存在する．さらに $U' = \{(x_1(p'), \dots, x_l(p')) \mid p' \in U\}$ を U の座標による像とする．U' は $\mathbb{R}^l$ の開集合である．ここで

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \{q \in V \cap W \mid (y_1(q), \dots, y_l(q)) \in U'\} \\ &= \{q \in V \cap W \mid (y_1(q), \dots, y_n(q)) \in U' \times \mathbb{R}^{n-l}\}\end{aligned}$$

とおくと $\tilde{V}$ は N の開集合であって，$(\tilde{V}; y_1, \dots, y_n)$ は N の局所座標を与える．ここで $\tilde{V} \cap f(L) = \{q \in \tilde{V} \mid y_{l+1}(q) = \cdots = y_n(q) = 0\}$ であることを示そう．$q \in \tilde{V} \cap f(L)$ に対して $q \in V \cap W \cap f(L) = V \cap f(U) = f(U)$ より，写像 f の局所表示から $y_{l+1}(q) = \cdots = y_n(q) = 0$ である．逆に $q \in \tilde{V}$ が $y_{l+1}(q) = \cdots = y_n(q) = 0$ を満たすとする．$(y_1(q), \dots, y_l(q)) \in U'$ であるから，U の点 p' が存在して $(x_1(p'), \dots, x_l(p')) = (y_1(q), \dots, y_l(q))$．したがって $(y_1(q), \dots, y_n(q)) = (x_1(p'), \dots, x_l(p'), 0, \dots, 0)$．$f$ の局所表示から $q = f(p')$ であることが分かる．即ち $q \in \tilde{V} \cap f(L)$．以上より $f(L)$ が部分多様体であることが示された．(注意：教科書 [松本] の定理 12.4 の証明には少し穴があり，N の座標近傍として単に $V \cap W$ を考えているが，正しくは上のようにとるべきである．)

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2 点．はめ込みの局所座標表示に関する定理を正しく使えているか，また $L \to f(L)$ が ($f(L)$ の相対位相に関して) 同相であることを使っているかを見る．$V \cap W$ を $\tilde{V}$ に取り換える作業については必要だが，もししていなくても減点対象とはしない．基本的には 0 点か 2 点．部分点については個別に判断する．

問題 64 $(U; x_1, \dots, x_n)$ を点 $p \in L$ を含む N の座標近傍であって $U \cap L = \{q \in U \mid x_{l+1}(q) = \cdots = x_n(q) = 0\}$ となるものとする．ここで $\varphi = (x_1, \dots, x_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ とおく．座標の定義から $U' := \varphi(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．$V := U \cap L$ とし，$\psi := \varphi|_V\colon V \to \mathbb{R}^l \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ とおく．まず，(V, ψ) が L の座標近傍であることを示す．V は L の相対位相に関する開集合である．また $\psi(V) = U' \cap (\mathbb{R}^l \times \{0\})$ は $\mathbb{R}^l$ の開集合である．($\mathbb{R}^l \times \{0\}$ の $\mathbb{R}^n$ の部分集合としての相対位相は，$\mathbb{R}^l$ の位相と一致するから．) さらに $\psi\colon V \to \psi(V)$ は同相写像 $\varphi\colon U \to U'$ の V への制限であるから，同相である．

次にこれらの座標近傍の間の座標変換が C^∞ 級であることを確かめる．(V_α, ψ_α), (V_β, ψ_β) を L の座標近傍であって，上で記述した方法で N の座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) の L への制限として得られるものとする．このとき，L の座標変換 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}\colon \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ は $\mathbb{R}^l$ の開集合から $\mathbb{R}^l$ の開集合への写像であって，N の座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$（これは $\mathbb{R}^n$ の開集合から $\mathbb{R}^n$ の開集合への C^∞ 級写像）の $\mathbb{R}^l \times \{0\}$ への制限として得られる．したがって $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ は C^∞ 級である．

問題 65 開集合 $\{\pm z > 0\}$ の上で (x, y) 平面への射影を座標にとると，f の座標表示は xy であり，この臨界点は $x = y = 0$ のみ．また開集合 $\{\pm y > 0\}$ 上で (x, z) 平面への射影を座標にとると，f の座標表示は $\pm x\sqrt{1 - x^2 - z^2}$．この臨界点は $x^2 + z^2 < 1$ 内では $(x, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ のみである．開集合 $\{\pm x > 0\}$ でも同様．以上より臨界点は $(0, 0, \pm 1)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (複合任意) の 6 点．

問題 66

(1) $F \subset M$ が閉であれば，$U_\alpha \cap F$ は U_α の閉集合である．逆に，全ての α について $U_\alpha \cap F$ が U_α の閉集合であったとする．このとき $U_\alpha \setminus F$ は U_α の開集合であり，U_α は開集合であるから M の開集合でもある．ここで，

$$M \setminus F = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \setminus A)$$

に注意すると，$F \setminus F$ は開集合．従って F は M の閉集合である．

(2) M を座標近傍の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ であって $f(U_\alpha)$ が N の座標近傍 (V_α, ψ_α) に含まれるものをとる．このとき $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ はユークリッド空間の開集合の間の C^∞ 級写像とみなせる．(1) から $\{p \in U_\alpha : \mathrm{rank}(Jf_\alpha)_p \leq r\}$ が U_α の閉集合であることを示せば十分である．この集合は

$$\{p \in U_\alpha : l \geq r + 1 \text{ に対して } (Jf_\alpha)_p \text{ の } l \text{ 次小行列式が全てゼロ }\}$$

と書き直せるが，$(Jf_\alpha)_p$ の小行列式は全て U_α 上の連続関数であるから，この集合は閉集合である．

問題 67 (解１):l, m を $\mathbb{R}^{n+1}$ の相異なる１次元部分空間とし，$l = \mathbb{R}(x_1, \dots, x_{n+1})$, $m = \mathbb{R}(y_1, \dots, y_{n+1})$ とする．もし $x_i \neq 0$ かつ $y_i \neq 0$ となる i が存在したとする．このとき，(U_i, φ_i) を問題60 にあるような $\mathbb{RP}^n$ の座標とすると，仮定より $l, m \in U_i$ である．$\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ は同相写像であり，$\mathbb{R}^n$ はハウスドルフであるから，l, m を分離する開集合が存在する．

もし $x_i \neq 0$ かつ $y_i \neq 0$ となる i が存在しなかったとする．このとき $x_j \neq 0$ なる j をとると，$y_j = 0$ である．ここで $\varphi_j(l) \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径１の開球体 B をとると，$\varphi_j^{-1}(B)$ は l の開近傍となる．m は U_j に属さないので，特に $\varphi_j^{-1}(\overline{B}) \subset U_j$ の補集合に属する．従って $\varphi_j^{-1}(\overline{B})$ が $\mathbb{RP}^n$ の閉集合であることが示されればよい．自然な射影 $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ に対して，

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}\varphi_j^{-1}(\overline{B}) &= \left\{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : z_j \neq 0,\ \sum_{i \neq j} \left| \frac{x_i}{x_j} - \frac{z_i}{z_j} \right|^2 \leq 1 \right\} \\
&= \left\{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : \sum_{i \neq j} \left| z_j \frac{x_i}{x_j} - z_i \right|^2 \leq |z_j|^2 \right\}
\end{aligned}$$

これは $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の閉集合であるから，主張が示された．

(解２):2 直線の角度のアイデアを使う．l, m を上の通りとすると，l, m のなす角度 θ は $|\cos(\theta)| = \frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$ を満たす．ここで $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ であり，(x, y) は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積．Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件を思い出すと，$l = m$ は $|\cos\theta| = \frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = 1$ と同値であることが分かる．ここで $l = \mathbb{R}x$ を固定して関数 $\tilde{f}_l\colon (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$ を考える．$\tilde{f}_l$ は写像 $f_l\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ であって $\tilde{f}_l = f_l \circ \pi$ なるものを誘導することは容易に分かる．問題 60（あるいは問題 7）と同じ理由により $\tilde{f}_l$ の連続性から f_l の連続性が従う．$l \neq m$ であるとすると，$f_l(m) < 1$ である．$f_l(m) < c < 1$ なる実数 c をとり，$U = \{k \in \mathbb{RP}^n \mid f_l(k) > c\}$, $V = \{k \in \mathbb{RP}^n \mid f_l(k) < c\}$ とおくと，U, V は l, m を分離する開集合である．

幾何学 I　演習問題 No.7 (2020 年 6 月 10 日)

レポート課題 No.7　以下の**問題 77 と問題 81** を解いて，6 月 16 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 71 関数 $a(x)$ を次で定める．

$$a(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

自然数 k に関する帰納法で次を証明せよ．$a(x)$ は k 回微分可能であり，ある多項式 $P_k(y)$ が存在して次が成立する．

$$a^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(1/x)e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

このことから $a(x)$ は C^∞ 級であることが従う．

問題 72 M を位相多様体，(U, φ) を M の座標近傍とする．つまり $U \subset M$ は M の開集合で $\varphi\colon U \to U' \subset \mathbb{R}^m$ は U と $\mathbb{R}^m$ の開集合 U' の間の同相写像とする．B_ϵ, $\overline{B_\epsilon}$ で（原点中心の）$\mathbb{R}^m$ の開球体および閉球体を表すことにする．

$$\begin{aligned} B_\epsilon &= \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 < \epsilon^2\} \\ \overline{B_\epsilon} &= \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq \epsilon^2\} \end{aligned}$$

閉球体 $\overline{B_\epsilon}$ が U' に含まれるとき，$\overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)} = \varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ を示せ．ただし左辺は M における閉包をあらわす．(問題 40 の類似問題)

問題 73 位相空間 X の部分集合 $U_1, \ldots, U_N$ について $\overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N} = \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$ を証明せよ．

標準問題

問題 74 位相多様体 M に対して次の条件は同値であることを示せ．

(a) M は σ コンパクト

(b) M は第二可算公理を満たす.（可算個の開基が存在する）

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 75 位相空間 X の部分集合族 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が局所有限であるとき，次を示せ．

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda}.$$

問題 76 M を第 2 可算公理を満たす C^∞ 級多様体とする．F_1, F_2 を互いに交わらない閉集合とするとき，M 上の C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ であって $f|_{F_1} = 1$, $f|_{F_2} = 0$ となるものが存在することを示せ．

問題 77 M を第 2 可算公理を満たす多様体，$N \subset M$ を閉部分多様体とする．N 上の C^∞ 級関数 f は M 上の C^∞ 級関数に拡張されることを示せ．

（ヒント：局所的な f の拡張 f_α を作り，適当な 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ を用意して $\sum_\alpha \rho_\alpha f_\alpha$ を考える．）

問題 78 写像 $f\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ を合成 $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^n$ により定める．この写像 f は 2 対 1 の被覆写像であることを示せ．

問題 79 Hopf 写像 $f\colon S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ が C^∞ 級写像であって，沈めこみであることを証明せよ．

問題 80 $\mathbb{RP}^n$ 上の関数

$$f([x_0, x_1, \ldots, x_n]) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^2}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$$

が C^∞ 級であることを示し，その臨界点を求めよ．

問題 81 写像 $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^6$ を $(x, y, z) \in S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対して $f([x, y, z]) = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$ と定義する．f は C^∞ 級写像であり，また埋め込みであることを示せ．

<u>発展問題</u>

問題 82 $(n + 1)$ 変数多項式 $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ が自然数 $k \geq 1$ に対して次の条件を満たすと仮定する．

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1}) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \implies (x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$$

このとき $\mathbb{RP}^n$ の部分集合

$$\{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0\}$$

は $\mathbb{RP}^n$ の部分多様体であることを示せ．

問題 83 σ コンパクトかつ局所コンパクトなハウスドルフ位相空間はパラコンパクトであることを示せ．(ヒント：1 の分割の存在を示すときに授業で使った補題を使う．)

問題 84 (長い半直線)　ω_1 を最小の非可算順序数，すなわち非可算の整列順序集合 ω_1 であって任意の $\beta \in \omega_1$ に対して $\{\alpha \in \omega_1 \mid \alpha \leq \beta\}$ が可算集合になるものとする．集合 $X = \omega_1 \times [0,1)$ に辞書式順序を入れる．つまり $(\alpha, x) \leq (\beta, y) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $x \leq y$ と定める．集合 X の位相を $(a,b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$, $a, b \in X$ の形の集合を開基とする位相とする．$0 \in \omega_1$ を ω_1 の最小元とし，$X^* = X \setminus \{(0,0)\}$ とおく．X を閉じた長い半直線，X^* を開いた長い半直線という．X^* は連結 1 次元 C^∞ 多様体であって，第 2 可算ではない (したがって σ コンパクトではない) ことを示せ．

問題 85 第 2 可算公理を満たす多様体は可分 (稠密な可算部分集合を持つ) であることを示せ．逆に可分であるが第 2 可算ではない多様体の例を挙げよ．

幾何学 I　演習問題 No.7 略解

問題 71 教科書 [松本幸夫] 補題 13.10 とその周辺の説明を参照せよ．

問題 72 φ^{-1} は同相写像で $\overline{B_\epsilon}$ はコンパクトだからその像 $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ はコンパクト．M はハウスドルフなので $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ は閉集合である．$\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ は $\varphi^{-1}(B_\epsilon)$ を含む閉集合だから $\overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)} \subset \varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$. 一方の包含関係は示された．

逆に $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon}) \subset \overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)}$ を示す．任意の点 $x \in \overline{B_\epsilon}$ に対して点列 $x_n \in B_\epsilon$ であって $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となるものがとれる．φ^{-1} は $\overline{B_\epsilon}$ を含む開集合 U' 上で連続であるから，$\varphi^{-1}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-1}(x_n)$ である．ここで $\varphi^{-1}(x_n) \in \varphi^{-1}(B_\epsilon)$ より $\varphi^{-1}(x) \in \overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)}$. 従って逆の包含関係 $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon}) \subset \overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)}$ が示された．

問題 73 集合 A の閉包 $\overline{A}$ とは A を含む最小の閉集合であったことを思い出そう．$U_1 \cup \cdots \cup U_N \subset \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$ であって $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$ は閉集合の有限和なので閉集合である．したがって $\overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N} \subset \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$. 逆に $U_i \subset \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$ であるから $\overline{U_i} \subset \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$. したがって $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N} \subset \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$. 以上より $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N} = \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$

問題 74 (a) $\Rightarrow$ (b)：M の各点 x は $\mathbb{R}^n$ の開球体と同相な近傍 $U(x)$ を持つ．$M = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, K_i はコンパクト，のとき，各 K_i は有限個の $U(x)$ で覆われる．これらの近傍を全てあわせて，M は可算個の開球体と同相な集合で覆われる．$\mathbb{R}^n$ の開球体は第二可算公理を満たす．（有理点を中心とする半径 $1/n$ の開球体たちが開基となる．）第二可算公理を満たす位相空間の可算和はやはり第二可算公理を満たす．

(b) $\Rightarrow$ (a)：$\{U_i\}_{i=1}^\infty$ を可算開基とする．開基の元 U_i のうち，あるコンパクト集合に含まれるものを全て集めてできる集合族を $\mathcal{U}$ とする．$\mathcal{U}$ が M の開被覆を与えることを示そう．任意の点 $x \in M$ はコンパクトな近傍 K を持つ．このとき開基の性質から，ある U_i が存在して $x \in U_i \subset K$ となる．ここで $U_i \in \mathcal{U}$ である．したがって $\mathcal{U}$ は M の開被覆である．$\mathcal{U} = \{V_j\}_{j=1}^\infty$ とすると，V_j を含むコンパクト集合 K_j が存在する．このとき $M = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$.

問題 75 (松本幸夫，補題 14.9 参照)　包含関係 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}$ は問題 73 と同様に出来る．逆向きの包含関係を示す．$x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}$ とする．局所有限の定義から x の開近傍 V が存在して $V \cap G_\lambda \neq \emptyset$ となる λ は有限個である．それらを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．もし $x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda}$ であるならば各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $x \notin \overline{G_{\lambda_i}}$ であるから，x の開近傍 V_i であって $V_i \cap G_{\lambda_i} = \emptyset$ となるものが存在する．$U = V \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n$ とおくとき，U は x の開近傍であって任意の $\lambda \in \Lambda$ について $U \cap G_\lambda = \emptyset$.（実際 λ が $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ のどれでもなければ $U \cap G_\lambda \subset V \cap G_\lambda = \emptyset$ であるし，$\lambda = \lambda_i$ ならば $U \cap G_{\lambda_i} \subset V_i \cap G_{\lambda_i} = \emptyset$ である．）したがって $U \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \emptyset$. これは $x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}$ に反する．よって $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda}$.

問題 76 $U_1 = M \setminus F_2$, $U_2 = M \setminus F_1$ とする．$F_1 \cap F_2 = \emptyset$ より U_1, U_2 は M の開被覆である．U_1, U_2 に対応する 1 の分割 ρ_1, ρ_2 を考えると，$\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ ゆえ，$\rho_1|_{F_2} = 0$ かつ $\rho_2|_{F_1} = 0$. $\rho_1 + \rho_2 = 1$ より $\rho_1|_{F_1} = 1$. よって $f = \rho_1$ は条件を満たす．

問題 77 M の次元を m，N の次元を n とする．N は部分多様体であるから，N の任意の点 p に対してそれを含む M のチャート $(U_p; x_1, \ldots, x_m)$ であって，$U_p \cap N = \{x_{n+1} = \cdots = x_m = 0\}$ となるものが存在する．M は $\{U_p\}_{p\in N}$ および開集合 $M \setminus N$ によって覆われる．この開被覆に付随する 1 の分割を $\{\rho_p\}_{p\in N} \cup \{\tau\}$ とする．ここで

- $\mathrm{Supp}\,\rho_p \subset U_p$, $\mathrm{Supp}\,\tau \subset M \setminus N$,
- $0 \leq \rho_p(x) \leq 1$, $0 \leq \tau(x) \leq 1$,
- $\{\mathrm{Supp}\,\rho_p\} \cup \{\mathrm{Supp}\,\tau\}$ は局所有限，

- $\sum_{p\in N}\rho_p(x)+\tau(x)=1$

が成立している．チャート U_p 上での f の拡張 f_p を座標を使って次のように定義する．

$$f_p(x_1,\dots,x_m)=f(x_1,\dots,x_n)$$

f_p は明らかに U_p 上の C^∞ 級関数である．次に M 上の関数 $\tilde{f}_p$ を

$$\tilde{f}_p(x)=\begin{cases}\rho_p(x)f_p(x) & x\in U_p\\ 0 & x\notin U_p\end{cases}$$

と定める．$\tilde{f}_p$ は C^∞ 級関数である．実際，$M=U_p\cup(M\setminus\operatorname{Supp}\rho_p)$ は開被覆であるが，$\tilde{f}_p|_{U_p}=\rho_p f_p$ および $\tilde{f}_p|_{M\setminus\operatorname{Supp}\rho_p}=0$ は各々C^∞ 級であるからである．最後に f の拡張を

$$\tilde{f}=\sum_{p\in N}\tilde{f}_p$$

とおく．$\operatorname{Supp}\tilde{f}_p=\operatorname{Supp}\rho_p$ は局所有限であるから，$\tilde{f}$ は C^∞ 級関数である．また $x\in N$ に対して $\tau(x)=0$ より $\sum_{p\in N}\rho_p(x)=1$．従って，

$$\tilde{f}(x)=\sum_{p\in N}\tilde{f}_p(x)=\sum_{p\in N:x\in U_p}\tilde{f}_p(x)=\sum_{p\in N:x\in U_p}\rho_p(x)f(x)=\left(\sum_{p\in N}\rho_p(x)\right)f(x)=f(x).$$

すなわち $\tilde{f}(x)$ は f の拡張になっている．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2点．部分多様体の定義を使って f の局所的な拡張 f_α を与え，それを1の分割により $\sum_\alpha\rho_\alpha f_\alpha$ の形に張り合わせているかどうかを見る．議論の大筋が間違っているものは0点．議論の大筋は似ていても N が閉であるという条件を使っていないものは1点減点する．(上の解答では $M\setminus N$ が開集合というところで使っている．) 議論の細かい部分，例えば局所的拡張やそれに cut-off 関数 ρ_α をかけた関数の滑らかさに関する議論，和 $\sum_\alpha\rho_\alpha f_\alpha$ が局所有限ゆえ滑らかになること等については，不十分でも (基本的には) 減点しない．

授業では，1の分割の存在定理の別のバージョンも紹介した．$\{U_\alpha\}$ を開被覆とするとき，高々可算個の1の分割 $\{\rho_j\}_{j=1}^\infty$ であって $\{\operatorname{Supp}\rho_j\}$ は $\{U_\alpha\}$ の局所有限な細分であり，$\sum_j\rho_j(x)=1$, $0\le\rho_j(x)\le 1$ が成り立つものが存在する．このバージョンに基づいた解答でももちろん (正しく議論していれば) 正解である．

問題 78 略

問題 79 局所座標を使って $\pi\colon S^{2n+1}\to\mathbb{CP}^n$ を座標表示する．S^{2n+1} の局所座標

$$U=\{(x_1,\dots,x_{2n+2})\in\mathbb{R}^{2n+2}:x_{2n+2}>0\},\quad \varphi(x_1,\dots,x_{2n+2})=(x_1,\dots,x_{2n+1})$$

を考える．ただし $\mathbb{R}^{2n+2}$ の点 $(x_1,\dots,x_{2n+2})$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ の点 $(x_1+ix_2,\dots,x_{2n+1}+ix_{2n+2})$ と同一視することにする．$\pi(U)$ は $\mathbb{CP}^n$ の座標近傍

$$V=\{[z_0,\dots,z_n]:z_n\neq 0\},\quad \psi([z_0,\dots,z_n])=\left(\frac{z_0}{z_n},\dots,\frac{z_{n-1}}{z_n}\right)$$

に含まれるので，合成 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ を考えると，

$$\begin{aligned}\psi\circ\pi\circ\varphi^{-1}(x_1,\dots,x_{2n+1})&=\psi\circ\pi\left(x_1,\dots,x_{2n+1},\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{2n+1}^2}\right)\\&=\left(\frac{x_1+ix_2}{x_{2n+1}+i\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{2n+1}^2}},\dots,\frac{x_{2n-1}+ix_{2n}}{x_{2n+1}+i\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{2n+1}^2}}\right)\end{aligned}$$

となるが各成分は全て $\{(x_1,\dots,x_{2n+1}):x_1^2+\cdots x_{2n+1}^2<1\}$ 上の C^∞ 級関数．他の座標近傍上でも同様であり，したがって π は C^∞ 級である．

次に π が沈めこみであることを示す．U の点 $p=(a_1,\dots,a_{2n+2})$ をとる．$\epsilon=a_{2n+1}+ia_{2n+2}$ とおく．$\pi(U)$ 上で π の次のような section s が取れる．(ただし section(切断) とは写像 $s\colon\pi(U)\to U$ であって $\pi\circ s=\mathrm{id}_{\pi(U)}$ を満たすもののことを言う．) 写像 $s\colon\pi(U)\to U$ を

$$s([z_0,\dots,z_n])=\frac{\epsilon}{|\epsilon|\sqrt{|\frac{z_0}{z_n}|^2+\cdots+|\frac{z_{n-1}}{z_n}|^2+1}}\left(\frac{z_0}{z_n},\dots,\frac{z_{n-1}}{z_n},1\right)$$

で定めると s の座標表示は

$$(w_1,\dots,w_n)\longmapsto\frac{1}{|\epsilon|\sqrt{|w_1|^2+\cdots+|w_n|^2+1}}(\epsilon w_1,\dots,\epsilon w_n,a_{n+1})$$

であるから s は C^∞ 級写像である．また s は

$$\pi\circ s=\mathrm{id}_{\pi(U)},\quad s(\pi(p))=p$$

を満たす．従って

$$d_p\pi\circ d_{\pi(p)}s=\mathrm{id}$$

となり $d_p\pi$ は全射である．section s は座標近傍 U や点 p ごとに異なるが，S^{2n+1} の各々の座標近傍で π の section が取れることがわかるので，π は全ての点で沈めこみである．

問題 80 臨界点は $[1,0,\dots,0],[0,1,0,\dots,0],\dots[0,\dots,0,1]$ の $n+1$ 点．

問題 81 $[x,y,z]$ と等しい点を与える S^2 の点は (x,y,z) と $(-x,-y,-z)$ のみであることから，f が well-defined であることが分かる．

まず，f が C^∞ 級であることを示そう．$\mathbb{RP}^2$ の局所座標を $(U_i,\varphi_i),U_i=\{[x_1,x_2,x_3]:x_i\neq0\}$，$\varphi_i([x_1,x_2,x_3])=(\frac{x_j}{x_i})_{j\neq i}$ とおく．例えば U_1 上での座標表示は $\varphi_1^{-1}(y,z)=[1,y,z]=[\frac{1}{\sqrt{1+y^2+z^2}}(1,y,z)]$, $\frac{1}{\sqrt{1+y^2+z^2}}(1,y,z)\in S^2$ なので，

$$f\circ\varphi_1^{-1}(y,z)=\frac{1}{1+y^2+z^2}(1,y^2,z^2,y,yz,z)$$

で与えられる．従って f は U_1 上で C^∞ 級．他のチャートの上でも同様に C^∞ 級であることが示される．

次に f が埋め込みであることを示そう．$\mathbb{RP}^2$ はコンパクトであるから，単射はめ込みであることを示せば十分である．

単射性：$(x,y,z),(x',y',z')\in S^2$ で $f([x,y,z])=f([x',y',z'])$ とすると，

$$x^2=x'^2,\ y^2=y'^2,\ z^2=z'^2,\ xy=x'y',\ yz=y'z',\ z'x'=zx$$

である．もし $x\neq0$ であれば，第 1 の式から $x'=\epsilon x$ $(\epsilon\in\{\pm1\})$ である．また $xy=x'y'$, $xz=x'z'$ から $y'=\epsilon y,\ z'=\epsilon z$ が従う．従って $[x',y',z']=[\epsilon x,\epsilon y,\epsilon z]=[x,y,z]$ である．$y\neq0$ の場合，$z\neq0$ の場合も同様にして $[x',y',z']=[x,y,z]$ が示される．

はめ込みであること　U_1 における座標表示の Jacobi 行列は

$$J(f\circ\varphi_1^{-1})=\frac{1}{(1+y^2+z^2)^2}\begin{pmatrix}-2y & -2z\\ 2y(1+z^2) & -2y^2z\\ -2yz^2 & 2z(1+y^2)\\ 1-y^2+z^2 & -2yz\\ z(1-y^2+z^2) & y(1+y^2-z^2)\\ -2yz & 1+y^2-z^2\end{pmatrix}$$

この行列のランクは2である．実際，1行目と2行目からなる部分行列の行列式は$(1+y^2+z^2)^{-3}4yz$であるが，これがゼロでなければランクは2．もしゼロであれば，$y=0$または$z=0$である．$y=0$のとき，Jacobi行列は

$$\frac{1}{(1+z^2)^2}\begin{pmatrix} 0 & -2z \\ 0 & 0 \\ 0 & 2z \\ 1+z^2 & 0 \\ z(1+z^2) & 0 \\ 0 & 1-z^2 \end{pmatrix}$$

となる．3行目と4行目からなる部分行列の行列式は$-(1+z^2)^{-3}2z$であり，これがゼロでなければランクは2．もしゼロであれば$z=0$である．この時にランクが2であることは容易に確かめられる．$y\neq 0$, $z=0$のときも同様である．従ってJacobi行列は単射線形写像を表す．従ってU_1上ではめ込み．U_2, U_3上ではめ込みになっていることも同様．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2点．fがC^∞級であることを示して1点，またfが埋め込みであることを示して1点．C^∞級であることについては，一つのチャートで示していれば十分とみなす．埋め込みであることは，定義(はめ込みで像との同相である)に基づいて正しく示しているか，あるいは$\mathbb{RP}^2$がコンパクトであることに言及し，単射はめ込みであることを示しているかを見る．はめ込みについては，1つのチャートで微分をおおよそ正しく計算して(細かい計算違いは減点しない)単射線形写像であることが主張されていれば可．単射性は主張されていれば認めることにし，計算間違い等は減点しない．($\mathbb{R}^3$上での写像$(x,y,z)\mapsto(x^2,y^2,z^2,xy,yz,zx)$の微分を計算し，そのKernelと$T_pS^2$との交わりを求める方法，あるいはこの写像$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^6$が原点以外ではめ込みになっていることを示す方法も考えられるが，その場合は注意深い議論が必要．つまり，写像$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^6$と写像$\mathbb{RP}^2\to\mathbb{R}^6$の微分の間の関係を明らかにする必要がある．)

問題 85 このサイトの議論を見よ．

幾何学 I　演習問題 No.8 (2020 年 6 月 17 日)

レポート課題 No.8　以下の**問題 89 と問題 92** を解いて，6 月 23 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 86 $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ が $\mathbb{R}^n$ の部分多様体であることを次の二つの方法で確かめよ．

(1) 定義に基づき，S^{n-1} の各点 p で $\mathbb{R}^n$ の座標近傍 $(U; y_1, \ldots, y_n)$ をうまくとると，$U \cap S^{n-1} = \{y_n = 0\}$ と書けることを示す．(例えば $p = (-1, 0, \ldots, 0)$ で確かめよ．)

(2) 1 は関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ の正則値であることを示す．

注：当然 (2) の方が容易である．(2) から (1) をどのように導いたか思い出しておこう．(沈め込みの局所座標表示に関する結果を使う．)

問題 87 M を C^∞ 級多様体，$p \in M$ とする．f を点 p の開近傍 U で定義された C^∞ 級関数とする．授業で示したように，次の性質を持つ p の開近傍 V と隆起関数 (bump function) $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ が存在する：$\overline{V} \subset U$, ρ は C^∞ 級関数で，$0 \le \rho(x) \le 1$, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset U$, $\rho|_{\overline{V}} = 1$．このとき次の関数 $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数であって $\tilde{f}|_V = f|_V$ を満たすことを示せ．

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \rho(x)f(x) & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

問題 88 次の $\mathbb{R}^2$ のベクトル場 X, Y の交換子積 $[X, Y]$ を計算せよ．

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

(問題 93 を使ってよい．) どうしてそのような計算結果になるか考察せよ．

標準問題

問題 89 $f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像，$q \in N$ を f の正則値とする．このとき $f^{-1}(q)$ は M の部分多様体であり，$p \in f^{-1}(q)$ での接空間 $T_pf^{-1}(q)$ は T_pM の部分ベクトル空間と見なすことができる (埋め込み写像 $i\colon f^{-1}(q) \to M$ の微分 d_pi は単射なので)．$T_pf^{-1}(q) = \mathrm{Ker}(d_pf\colon T_pM \to T_qN)$ を示せ．

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 90 $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tAA = E_n\}$ を直交群とする．

(1) $O(n,\mathbb{R})$ が $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ のコンパクト部分多様体であることを示せ．

(2) $O(n,\mathbb{R})$ の単位元での接空間 $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ を $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間として求めよ．$\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ が交換子積で閉じていることを示せ．

問題 91 積 $O(n,\mathbb{R}) \times O(n,\mathbb{R}) \to O(n,\mathbb{R})$ および逆元をとる写像 $O(n,\mathbb{R}) \to O(n,\mathbb{R})$ が C^∞ 級写像であることを示せ．

問題 92 ユニタリー群を $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = E_n\}$ で定義する．ここで $M_n(\mathbb{C})$ は複素数係数の n 次正方行列全体のなすベクトル空間である．$U(n)$ は $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ の部分多様体であることを証明せよ．また $U(n)$ の単位元での接空間 $\mathfrak{u}(n)$ を $M_n(\mathbb{C}) = T_{E_n}M_n(\mathbb{C})$ の部分空間として求め，それが括弧積で閉じていることを示せ．

問題 93 $\mathbb{R}^m$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^m \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^m \eta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ を考える．C^∞ 級関数 f に対して，$[X,Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$ と定めるとき，

$$[X,Y]f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\xi_j(x)\frac{\partial \eta_i(x)}{\partial x_j} - \eta_j(x)\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

とかけることを示せ．

問題 94 多様体上の C^∞ 級ベクトル場 X, Y, Z および C^∞ 級関数 f について，次を示せ．

(1) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

(2) $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$.

問題 95 複素平面 $\mathbb{C}$ の座標 $z = x + \sqrt{-1}y \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$ を考える．$\mathbb{C}$ 上のベクトル場 $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ は Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張されることを示せ．

問題 96 $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subset \mathbb{R}^2$ に次の関係の生成する同値関係を入れる．

$$(x,0) \sim (y,1) \iff x = y \text{ かつ } x \neq 0$$

X には $\mathbb{R}^2$ からの相対位相を入れ，この同値関係についての商位相空間を $Y = X/\sim$ とする．また $U_i \subset Y$ $(i = 0,1)$ を $\mathbb{R} \times \{i\}$ の Y における像とする．

(1) Y はハウスドルフではないことを示せ．

(2) U_i は Y の開集合であることを示せ．

(3) $\pi_i\colon \mathbb{R}\times\{i\} \to U_i$ を自然な写像とする．π_i は同相写像であり，$\{(U_0, \pi_0^{-1}), (U_1, \pi_1^{-1})\}$ は Y の C^∞ 級アトラスであることを示せ．(したがって Y は「ハウスドルフでない C^∞ 級多様体」である．)

(4) 開被覆 $\{U_0, U_1\}$ に従属する 1 の分割は存在するか．

問題 97 $\mathbb{R}^2$ を次の同値関係 $\sim$ で割った商位相空間を M とする．

$$(x, y) \sim (x + n, (-1)^n y + m) \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

$\pi\colon \mathbb{R}^2 \to M$ を商写像とする．M はハウスドルフであり，$\pi\colon \mathbb{R}^2 \to M$ が C^∞ 級写像になるような C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ．

<u>発展問題</u>

問題 98 リー群 G が多様体 M に推移的に作用するとする．ここで G の M への**作用**とは，C^∞ 級写像 $G \times M \to M, (g, m) \mapsto g \cdot m$ で $1 \cdot m = m$ および $(g_1 g_2) \cdot m = g_1 \cdot (g_2 \cdot m)$ を満たすものが与えられることであり，作用が**推移的**であるとは，任意の 2 点 $m_1, m_2 \in M$ に対して $g \cdot m_1 = m_2$ を満たす $g \in G$ が存在することである．$m \in M$ を固定するとき，写像 $G \to M,\ g \mapsto g \cdot m$ は沈め込みであることを示せ．

問題 99 リー群 G が多様体 M に推移的に作用するとする．$N, L \subset M$ を部分多様体とする．このとき $g \cdot N$ と L が横断的に交わる $g \in G$ が存在することを示せ．($g \cdot N$ と L が横断的に交わるとは，任意の $p \in (g \cdot N) \cap L$ に対して $T_p(g \cdot N) + T_p L = T_p M$ が成り立つこと．横断性については，No.6 の問題 69 も見よ．)

幾何学 I　演習問題 No.8 略解

問題 86　(1) 例えば $(-1, 0, \ldots, 0)$ の開近傍として $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0, x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ をとり，その上の座標を

$$(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_2, \ldots, x_n, x_1 + \sqrt{1 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}\right)$$

とおくとよい．

(2) $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ を満たす点 $p = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して，$d_p f = (2x_1, \ldots, 2x_n) \neq 0$ であるから．

問題 87 このように定義した $\tilde{f}$ が $\tilde{f}|_V = f|_V$ を満たすことは明らかである．$\tilde{f}$ が C^∞ 級であることを示せばよい．$\mathrm{Supp}(\rho) \subset U$ より，$M = U \cup (M \setminus \mathrm{Supp}(\rho))$ は M の開被覆を与える．$\tilde{f}$ が U および $M \setminus \mathrm{Supp}(\rho)$ の上で C^∞ 級であることを示せばよい．U 上では ρf に等しいので C^∞ 級である．$M \setminus \mathrm{Supp}(\rho)$ 上では恒等的に 0 なのでやはり C^∞ 級である．

問題 88 簡単な計算で $[X, Y] = 0$ である．極座標 (r, θ) をとる．($r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\theta = \tan^{-1}(y/x)$)．このとき

$$X = r\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \log r}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

と書けることから交換することが説明できる．(一般に，n 次元多様体上の互いに交換するベクトル場 $X_1, \ldots, X_n$ はある局所座標 $(y_1, \ldots, y_n)$ を用いて $X_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ の形に書ける．)

問題 89 前に示したことから，p の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ および q の座標近傍 $(V; y_1, \ldots, y_n)$ が存在して $f(U) \subset V$，$x_i(p) = y_j(q) = 0$，f の座標表示は $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ で与えられる ($n \leq m$)．このとき $(U \cap f^{-1}(q); x_{n+1}, \ldots, x_m)$ は $f^{-1}(q)$ の座標近傍を与え，包含写像 $\iota\colon f^{-1}(q) \to M$ に対して $d_p\iota(\frac{\partial}{\partial x_j})_p = (\frac{\partial}{\partial x_j})_p$，$j = n+1, \ldots, m$ である．したがって $T_p f^{-1}(q)$ を $T_p M$ の部分空間とみなしたとき，

$$T_p f^{-1}(q) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\rangle$$

である ($\langle \cdots \rangle$ は $\mathbb{R}$ 上生成する部分空間を表す．)．一方

$$d_p f\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_q & 1 \leq i \leq n \\ 0 & n+1 \leq i \leq m \end{cases}$$

したがって $T_p f^{-1}(q) = \mathrm{Ker}(d_p f)$ である．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．正しく議論していれば 2 点．そうでなければ 0 点．上の解答以外にも，$f \circ \iota = q$ であることから $d_p f \circ d_p\iota = 0$，すなわち $\mathrm{Im}\, d_p\iota \subset \mathrm{Ker}\, d_p f$ を得るが，次元を比較して $\mathrm{Im}\, d_p\iota = \mathrm{Ker}\, d_p f$ を結論するという解答も OK.

問題 90 (1) のコンパクト以外は授業で説明した．コンパクト性は $A \in O(n, \mathbb{R})$ の各列ベクトルが長さ 1 のベクトルであり，従って $O(n, \mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ の部分集合として有界閉集合であることから．

問題 91 $O(n,\mathbb{R})$ は ($M_n(\mathbb{R})$ の開部分集合である)$GL_n(\mathbb{R})$ の部分多様体でもある．$GL_n(\mathbb{R})$ に対しては積および逆元をとる写像は滑らか (C^∞ 級)．このことと，部分多様体の定義から，$O(n,\mathbb{R})$ の積と逆元をとる写像がなめらかであることが分かる．詳細略.

問題 92 次の写像 F を考える．

$$F\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Herm}(n), \qquad F(A) = {}^t\overline{A}A$$

ここで $\mathrm{Herm}(n)$ は n 次複素正方行列 A で ${}^t\overline{A} = A$ を満たすもの全体 (エルミート行列全体) の集合で，これは実 n^2 次元のベクトル空間である．F が $\mathrm{Herm}(n)$ に値をとる C^∞ 級写像であることは明らかである．$U(n) = F^{-1}(E_n)$ であるから，E_n が F の正則値であることを示せば十分である．まず F の $A \in M_n(\mathbb{C})$ での微分を計算する．

$$d_AF(X) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F(A+\epsilon X) - F(A)}{\epsilon} = {}^t\overline{A}X + {}^t\overline{X}A$$

d_AF が $A \in U(n)$ で全射になることを示したい．任意の $B \in \mathrm{Herm}_n$ に対して $X = \frac{1}{2}{}^t\overline{A}^{-1}B$ とおくとき，

$$ {}^t\overline{A}X + {}^t\overline{X}A = \frac{1}{2}{}^t\overline{A}{}^t\overline{A}^{-1}B + \frac{1}{2}{}^t\overline{B}A^{-1}A = \frac{1}{2}(B + {}^t\overline{B}) = B.$$

である．したがって E_n は F の正則値であり，$U(n) = F^{-1}(E_n)$ は $M_n(\mathbb{C})$ の (n^2 次元の) 部分多様体である．

E_n での接空間は $T_{E_n}M_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ の部分空間として

$$\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Ker}(d_{E_n}F\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Herm}_n) = \{X \in M_n(\mathbb{C})\colon {}^t\overline{X} + X = 0\}$$

で与えられる．すなわち歪エルミート行列全体のなす空間である．X_1, X_2 を歪エルミート行列とするとき，

$$ {}^t\overline{[X_1,X_2]} = {}^t(\overline{X}_1\overline{X}_2 - \overline{X}_2\overline{X}_1) = {}^t\overline{X}_2{}^t\overline{X}_1 - {}^t\overline{X}_1{}^t\overline{X}_2 = X_2X_1 - X_1X_2 = -[X_1,X_2]$$

ゆえ $[X_1,X_2]$ も歪エルミート．すなわち，$\mathfrak{u}(n)$ は括弧積で閉じている．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2 点．部分多様体であることが 1 点で，リー環 $\mathfrak{u}(n)$ を正しく求めて 1 点．(括弧積で閉じているところは採点対象外．) 部分多様体であることの議論は正しければ何でもよいが，もし正則値の逆像が部分多様体になるという定理を使っている場合は，微分が正しく計算できているか，また dF が全射であることが示せているか，を見る．(F の行先を $M_n(\mathbb{C})$ にしていると当然全射にならない．) リー環は $\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Ker}\, d_{E_n}F$ であることを使って正しい表示を与えていれば OK とする．(それ以外の解答も正しければもちろん OK だが個別に判断する．)

問題 93 (松本幸夫, p.231-232) の計算を参照のこと．

問題 94 (1) $[[X,Y],Z]f = [X,Y]Zf - Z[X,Y]f = (XY-YX)Zf - Z(XY-YX)f$ などと定義に従って展開すると，全ての項が消しあうことが分かる．詳細略.

(2) $[X,fY]g = XfYg - fYXg = X(f)\cdot Y(g) + f(XY(g)) - f(YX(g)) = (X(f)Y + f[X,Y])(g)$.

問題 95 無限遠点の周りでの座標を $u + \sqrt{-1}v = z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + \sqrt{-1}\frac{-y}{x^2+y^2}$ とおくとき，$\frac{\partial}{\partial x} = -(u^2-v^2)\frac{\partial}{\partial u} - 2uv\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial y} = 2uv\frac{\partial}{\partial u} - (u^2-v^2)\frac{\partial}{\partial v}$．これらは無限遠点 $u = v = 0$ の周りでの C^∞ 級ベクトル場に拡張される．よって $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張される．

問題 96 (1) X の点 (x,i) の同値類を $[x,i]\in Y$ と書くことにする．$[0,0]$ と $[0,1]$ を分離する開集合が存在しないことを示そう．$[0,0]\in V_0$, $[0,1]\in V_1$，V_0,V_1 は Y の開集合とする．また $\pi\colon X\to Y$ を自然な射影とする．$\pi^{-1}V_0$ は $(0,0)$ を含む開集合であるから，ある $\epsilon>0$ が存在して $(-\epsilon,\epsilon)\times\{0\}\subset\pi^{-1}V_0$．同様にある $\epsilon'>0$ が存在して $(-\epsilon',\epsilon')\times\{1\}\subset\pi^{-1}V_1$．ここで $\delta=\min(\epsilon/2,\epsilon'/2)$ とおくと，$(\delta,0)\in\pi^{-1}V_0$ かつ $(\delta,1)\in\pi^{-1}V_1$．$\pi^{-1}V_1$ は同値関係 $\sim$ で閉じているから $(\delta,1)\sim(\delta,0)\in\pi^{-1}V_1$ でもある．したがって $\pi^{-1}V_0\cap\pi^{-1}V_1\neq\emptyset$．すなわち $V_0\cap V_1\neq\emptyset$.

(2) $\pi^{-1}U_0=X\setminus\{(0,1)\}=X\cap(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\})$ は X の (相対位相に関する) 開集合であるから U_0 は Y の開集合．U_1 も同様.

(3) まず π_i が同相写像であることを示す．$\pi_i\colon\mathbb{R}\times\{i\}\to U_i$ は $\mathbb{R}\times\{i\}\hookrightarrow X\xrightarrow{\pi}Y$ (連続写像の合成より連続) から誘導される写像であるから連続である．π_i が全単射であることは明らかなので，π_i が開写像であることを示せばよい．$V\subset\mathbb{R}\times\{i\}$ を開集合とする．($\mathbb{R}\times\{i\}$ は X の開集合なので V は X の開集合である．) $\phi\colon X\to X$ を $\phi(x,i)=(x,1-i)$ で定義される同相写像とすると，$\pi^{-1}(\pi_i(V))=V\cup\phi(V\setminus\{(0,i)\})$ が成り立ち，これは X の開集合. よって $\pi_i(V)$ は Y の開集合.

次に $\varphi_0=\pi_0^{-1}$, $\varphi_1=\pi_1^{-1}$ の間の座標変換を見る．$\varphi_0\circ\varphi_1^{-1}\colon\varphi_1(U_0\cap U_1)\to\varphi_0(U_0\cap U_1)$ は $\mathbb{R}\setminus\{0\}=\varphi_1(U_0\cap U_1)=\varphi_0(U_0\cap U_1)$ の恒等写像であり，C^∞ 級.

(4) 1 の分割 $\{\rho_0,\rho_1\}$ が存在するとする．$\operatorname{Supp}\rho_0\subset U_0$, $\rho_0+\rho_1=1$ より $\rho_1([0,1])=1$ である．同様に $\rho_0([0,0])=1$ である．一方で $x_n=[\frac{1}{n},0]=[\frac{1}{n},1]$ とおくとき $1=\rho_0(x_n)+\rho_1(x_n)$. U_i 内で点列 x_n は $[0,i]$ に収束するので $1=\lim_{n\to\infty}(\rho_0(x_n)+\rho_1(x_n))=\rho_0([0,0])+\rho_1([0,1])=2$．これは矛盾である．よって $\{U_0,U_1\}$ に従属する 1 の分割は存在しない.

幾何学 I　演習問題 No.9 (2020 年 6 月 23 日)

レポート課題 No.9　以下の**問題 101** を解いて，6 月 30 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 100 次のベクトル場の積分曲線を求めよ．これらのベクトル場は完備か．

(1) $\mathbb{R}$ 上のベクトル場 $x^2\frac{\partial}{\partial x}$.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$.

(3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場 $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

(4) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ 上のベクトル場 $x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$.

標準問題

問題 101 n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $V(A)$ を $V(A) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ と定義する．ただし，$x_1, \ldots, x_n$ は $\mathbb{R}^n$ の座標．

(1) $V(A)$ の x_0 を初期値とする積分曲線 $x(t)$ が $x(t) = \exp(tA)x_0$ で与えられることを確認せよ．ただし，$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$ は行列の指数写像である．とくに $V(A)$ は完備なベクトル場である．

(2) A が交代行列，すなわち ${}^tA + A = 0$ を満たすとする．このとき $V(A)$ は単位球面 S^{n-1} に接している，すなわち，任意の $p \in S^{n-1}$ に対して，$V(A)_p \in T_pS^{n-1}$ であることを示せ．

(3) A を交代行列とする．(2) より $V(A)$ は S^{n-1} 上のベクトル場とみなすことができる．このとき $V(A)$ が S^{n-1} 上のベクトル場として滑らか (C^∞ 級) であることを示せ．またさらに (1) で求めた flow $\varphi_t(x_0) = \exp(tA)x_0$ は S^{n-1} を保つことを確認せよ．

(4) n 次正方行列 A, B に対して $[V(A), V(B)] = -V([A,B])$ を示せ．ただし右辺の $[A,B] = AB - BA$ は行列の交換子積である．

問題 102 C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場 X に対して $X(f) = f^2 + 1$ を満たす C^∞ 級関数 f が存在すれば，X は完備ではないことを示せ．

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 103 $f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された $\mathbb{R}^n$ 値の C^∞ 級関数とする．また a を U の点とする．次の微分方程式を考える．

$$x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

十分小さい $\epsilon > 0$ に対して U に値をとる C^∞ 級の解 $x\colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$ が一意的に存在することを次のようにして示せ．$x_0(t) = a$ を定数関数とし，関数 $x_n(t)$ を帰納的に

$$x_{n+1}(t) = a + \int_0^t f(x_n(s))ds$$

で定めるとき，ある区間 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上で $x_n(t)$ は解に一様収束する．

問題 104 $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^n f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ について，全ての i に対し $f_i(x)$ が $\mathbb{R}^n$ 上の有界関数であるとする．このとき X は完備であることを示せ．

問題 105 直交群 $O(n)$ のリー環の元 $X \in \mathfrak{o}(n)$ に対して，$O(n)$ 上のベクトル場 $\underline{X}$ を

$$\underline{X}_A = XA$$

で定める．$X, Y \in \mathfrak{o}(n)$ に対して $[\underline{X}, \underline{Y}] = -\underline{[X, Y]}$ を示せ．

問題 106 問題 105 におけるベクトル場 $\underline{X}$ は次のように得られることを示せ．$O(n)$ における積を $m\colon O(n) \times O(n) \to O(n)$ とかく．$m(g_1, g_2)$ において g_2 を固定し，g_1 について単位元 $g_1 = e = E_n$ で微分することで得られる写像を $D_1m(e, g_2)\colon \mathfrak{o}(n) = T_{E_n}O(n) \to T_{g_2}O(n)$ とする．このとき $\underline{X}_A = D_1m(e, A)X$ であることを示せ．

問題 107 $X, Y \in \mathfrak{o}(n)$ に対して，$O(n)$ 上のベクトル場 V を $V_A = XA + AY$ で定める．$V_A \in T_AO(n)$ であることを確かめ，その積分曲線を求めよ．

発展問題

問題 108 問題 103 の解は初期値 a および時間 t の両方について C^∞ 級であることを示せ．

問題 109 X を M 上の完備ベクトル場とする．X の生成する 1 パラメータ変換群を $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \to M, (x, t) \mapsto \Phi(x, t) = \varphi_t(x)$ とかく．Φ が $(x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$ の近傍で C^∞ 級であることを示そう．以下では簡単のため $t_0 > 0$ とする．

(1) $K = \Phi(\{x_0\} \times [0, t_0])$ とおく．K の開近傍 V と $\epsilon > 0$ が存在して Φ は $V \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上で C^∞ 級であることを示す.

(2) 自然数 $N > 0$ を $t_0/N < \epsilon$ となるようにとるとき，$\varphi_{t_0} = \overbrace{\varphi_{t_0/N} \circ \varphi_{t_0/N} \circ \cdots \circ \varphi_{t_0/N}}^{N \text{個}}$ を使って φ_{t_0} が x_0 の近傍で C^∞ 級であることを示す.

(3) $\Phi(x, t_0 + t) = \varphi_{t+t_0}(x) = \varphi_t(\varphi_{t_0}(x)) = \Phi(\varphi_{t_0}(x), t)$ を用いて Φ が (x_0, t_0) の近傍で C^∞ 級であることを示す.

幾何学 I　演習問題 No.9 略解

問題 100　(1) $x(t) = \frac{x(0)}{1-x(0)t}$．解は $t = 1/x(0)$ で爆発するので，完備ではない．

(2) 完備である．

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

(3) 完備である．($(x(0), y(0)) \neq (0,0)$ から出発した積分曲線は原点を通ることはない．)
$(x(t), y(t)) = (e^t x(0), e^t y(0))$．

(4)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

積分曲線は $x^2 - y^2 = \mathrm{const}$ を満たす．$(1,1)$ を通る積分曲線の像は $\{(x,x) : x > 0\}$ であり，この集合の点を初期値とする積分曲線は $(1,1)$ と有限時間でぶつかってしまう．従って完備ではない．

問題 101　(1) ベクトル場 $V(A)$ の点 $x(t)$ での値は基底 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ に関して表示すると，ベクトル $Ax(t)$ で与えられる．従って x_0 を初期値とする積分曲線 $x(t)$ は

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

を満たす．これを積分して

$$x(t) = \exp(tA)x_0$$

を得る．

(2) S^{n-1} は関数 $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ を用いて $S^{n-1} = f^{-1}(1)$ と書くことができる．ここで 1 は f の正則値であるから，$p \in S^{n-1}$ に対して $T_pS^{n-1} = \mathrm{Ker}\, d_pf$ が成り立っている．(ただし T_pS^{n-1} を包含写像の微分により自然に $\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n$ の部分空間とみなした．) 従って $d_pf(V(A)_p) = V(A)_pf = 0$ を示せば十分である．実際,

$$V(A)(f) = \left(\sum_{i,j} a_{i,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k,j} a_{k,j} x_j 2x_k = 0$$

となる．最後の変形で A が交代行列 $a_{k,j} = -a_{j,k}$ であることを用いた．

(3) $V(A)$ は明らかに $\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場としてなめらかである．$\mathbb{R}^n$ の部分多様体である S^{n-1} 上のベクトル場としてもなめらかであることを示そう．$p \in S^{n-1}$ の座標近傍 $(U; y_1, \ldots, y_n)$ を $U \cap S^{n-1} = \{y_n = 0\}$ となるようにとることができる．$V(A)$ は滑らかなので，この座標系において，U 上の C^∞ 級関数 $\xi_i(y_1, \ldots, y_n)$ により

$$V(A) = \sum_{i=1}^n \xi_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

と座標表示される．$V(A)$ が S^{n-1} に接しているという条件から，$\xi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) = 0$ である．S^{n-1} の局所座標は $(U \cap S^{n-1}; y_1, \ldots, y_{n-1})$ で与えられ，この座標に関して

$$V(A) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

と表示できる．従って $V(A)$ は S^{n-1} 上のベクトル場として C^∞ 級である．

flow $\varphi_t(x)$ が S^{n-1} を保つことを確認しておく．$x_0 \in S^{n-1}$ のとき，

$$\begin{aligned}\|\varphi_s(x)\|^2 &= {}^{\mathrm{t}}\varphi_s(x)\cdot\varphi_s(x)\\ &= {}^{\mathrm{t}}x_0 \exp(s{}^{\mathrm{t}}A)\exp(sA)x_0 = {}^{\mathrm{t}}x_0\exp(-sA)\exp(sA)x_0\\ &= {}^{\mathrm{t}}x_0\cdot x_0 = 1\end{aligned}$$

注: flow φ_t が S^{n-1} を保つことは (計算しなくても) ベクトル場 $V(A)$ が S^{n-1} に接していることから従う．理由を正確に述べると次のとおり．$V(A)$ を S^{n-1} に制限して S^{n-1} 上のベクトル場とみなしたものを $V'(A)$ と書く．包含写像を $i\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ と書くとき，$p\in S^{n-1}$ に対して $d_pi(V'(A)_p) = V(A)_{i(p)}$ であることに注意しよう．任意の点 $p\in S^{n-1}$ に対して p を初期値とする $V'(A)$ の積分曲線 $c(t)$ が存在する．ここで $i(c(t))$ が p を初期値とする $V(A)$ の積分曲線であることを示せばよい．(なぜなら，そのとき $i(c(t)) = \varphi_t(p)$ であり，φ_t が S^{n-1} を保つことが分かるから．) $i(c(0)) = i(p) = p$ であり，

$$\frac{d}{dt}i(c(t)) = d_{c(t)}i\left(\frac{dc}{dt}(t)\right) = d_{c(t)}i(V'(A)_{c(t)}) = V(A)_{i(c(t))}$$

従って $i(c(t))$ は $V(A)$ の積分曲線である．

(4) $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$ とおく．No.8 の問題 93 を使った直接計算により，

$$\begin{aligned}[V(A),V(B)] &= \sum_k\left\{\left(V(A)\left(\sum_l b_{k,l}x_l\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_k} - \left(V(B)\left(\sum_l a_{k,l}x_l\right)\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}\\ &= \sum_k\left\{\left(\sum_{i,j}a_{i,j}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_l b_{k,l}x_l\right)\right) - \left(\sum_{i,j}b_{i,j}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_l a_{k,l}x_l\right)\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}\\ &= \sum_k\left\{\sum_{i,j}b_{k,i}a_{i,j}x_j - \sum_{i,j}a_{k,i}b_{i,j}x_j\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}\\ &= V(BA-AB) = -V([A,B])\end{aligned}$$

$\boxed{\text{採点基準}}$ 各小問 1 点で計 4 点.

(1) は $x(t)$ に対する正しい微分方程式を立てているかどうかを見る．

(2) は $V(A)_p \perp p$ を示していても可とする．

(3) はベクトル場が滑らかであることの局所座標による定義にもどって考えているかどうか (単に「滑らかなベクトル場の制限だから滑らか」は認めない)，またフローが S^{n-1} を保っていることを計算して確かめている or 理由を正しく述べている (ベクトル場が S^{n-1} に接しているから明らか，でも認める) かを見る．[滑らかさと S^{n-1} を保つことの両方できて 1 点．] ベクトル場が滑らかであることの証明の別解としては，$f\mapsto (V(A)(f)\colon p\mapsto V(A)_p(f))$ が，$C^\infty(S^{n-1})\to C^\infty(S^{n-1})$ なる写像を定めていることを示す，などもありうる．(授業で $C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ なるライプニッツ則を満たす線形写像が C^∞ 級ベクトル場に対応することを説明した．)

(4) は正しく計算していれば OK．別解としてはちょっと高度であるが $V(A)$ のフロー $\varphi_t(x) = \exp(tA)x$ に対して Lie 微分 $\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_*V(B)|_{t=0}$ を計算するのも OK．($((\varphi_{-t})_*V(B))_p = e^{-tA}Be^{tA}p$ となる．)

問題 102 もし積分曲線 $c\colon\mathbb{R}\to M$ が存在すれば，$f(c(t))$ は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数で $\frac{d}{dt}f(c(t)) = \frac{dc}{dt}(t)(f) = X_{c(t)}(f) = f(c(t))^2+1$ を満たす．この微分方程式の一般解は $f(c(t)) = \tan(t+a)$ であるが，これは $\mathbb{R}$ 全体で C^∞ 級になりえない．

問題 103 $\overline{B_\delta(a)} \subset U$ となる $\delta > 0$ をとる．また $\overline{B_\delta(a)}$ 上での f の Lipschitz 定数を K，$|f|$ の最大値を M とする．つまり

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|, \qquad |f(x)| \le M \qquad (\forall x, y \in \overline{B_\delta(a)})$$

が成り立つとする．$\epsilon > 0$ を $M\epsilon < \delta$ なるものとするとき，集合

$$X = \{x(t) \in C^0([-\epsilon, \epsilon]) : \|x - a\|_{C^0} \le \delta\}$$

は写像 $\mathcal{F}\colon x(t) \mapsto a + \int_0^t f(x(s))ds$ で閉じていることが分かる．ここで $\|u\|_{C^0} = \sup_{s\in[-\epsilon,\epsilon]} |u(s)|$ は sup ノルムである．また $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\|_{C^0} = \sup_{t\in[-\epsilon,\epsilon]} \left| \int_0^t (f(x_1(s)) - f(x_2(s)))ds \right| \le \epsilon K \|x_1 - x_2\|_{C^0}$$

であるから，さらに $\epsilon > 0$ が $\epsilon K < 1$ を満たせば $\mathcal{F}\colon X \to X$ は縮小写像である．X は完備距離空間なので，縮小写像の原理から主張が従う．

問題 108 問題 103 の解は

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t) + a), \qquad x(0) = 0$$

の解により $a + x(t)$ で与えられる．従って，初期値に関する滑らかさの問題は，パラメータを含んだ微分方程式の解の滑らかさの問題に帰着される．そこで，一般に微分方程式

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), a, t), \qquad x(0) = 0 \tag{1}$$

の解の存在と滑らかさについて議論しよう．ここで $f(x, a, t)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ の原点 $(x, a, t) = (0, 0, 0)$ のある開近傍で定義された C^1 級関数とする．問題 103 と同じ議論を

$$X = \{x(a, t) \in C^0(\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon, \epsilon]) : \|x\|_{C^0} \le \delta\}$$

という形の関数空間で行うことにより，ある適当な $\epsilon > 0$, $r > 0$, $\delta > 0$ に対して積分方程式

$$x(a, t) = \int_0^t f(x(a, s), a, s)ds$$

解 $x(a, t) \in X$ が一意に存在することが分かる．(ここで f は $\overline{B_\delta(0)} \times \overline{B_r(0)} \times [-\epsilon, \epsilon]$ を含む開集合で定義されているものとする．) このとき $x(a, t)$ は a を止めたとき (1) の一意な解となっている．次に解 $x(a, t)$ が C^1 級であることを示そう．$\frac{\partial x}{\partial t}$ が連続であることは微分方程式 (1) から明らかであるから，$\frac{\partial x}{\partial a_j}$ が存在して連続であることを示せばよい．$x(a, t)$ が C^1 級であれば $g_{i,j}(a, t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}(a, t)$ は次の微分方程式を満たすはずである．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{i,j}(a, t) &= \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a, t), a, t) g_{k,j}(a, t) + \frac{\partial f_i}{\partial a_j}(x(a, t), a, t) \\ g_{i,j}(a, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

すなわち $g_{i,j}$ は非同時の線形微分方程式の解である．係数の関数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a, t), a, t)$，$\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(x(a, t), a, t)$ の連続性から，上の方程式 (正確にはこれを積分方程式に書き直したもの) の解 $g_{i,j}(a, t)$ は

$\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon, \epsilon]$ 上の連続関数として一意に存在する．微分方程式が線形なので，定義域をより小さくする必要はないことに注意しておこう．実際，

$$L = \sup_{(a,t) \in \overline{B_r(0)} \times [-\epsilon,\epsilon]} \left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,t),a,t) \right)_{i,k} \right\|$$

とおくと，解が $t \in [-1/(2L), 1/(2L)] \cap [-\epsilon, \epsilon]$ の範囲で存在することが縮小写像の原理から従うが，これを少しづつ大きい区間へと接続してゆけばよい．$g_{i,j}$ が $\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ に等しいことを示そう．以下では $a \in \overline{B_r(0)}$ を固定する．ベクトル値関数 $g_i(a,t)$ を $g_i(a,t) = (g_{i,j}(a,t))_{j=1,\dots,m}$ とおく．微小なベクトル $\delta a \in \mathbb{R}^m$ に対して (ただし δa は $a + \delta a \in \overline{B_r(0)}$ となるようにとるものとする)

$$\begin{aligned} x_i(a+\delta a,t) &= \int_0^t f_i(x(a+\delta a,s), a+\delta a, s)ds \\ x_i(a,t) &= \int_0^t f_i(x(a,s),a,s)ds \\ g_i(a,t)\cdot\delta a &= \int_0^t \left(\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,s),a,s)\cdot(g_k(a,s)\cdot\delta a) + \frac{\partial f_i}{\partial a}(x(a,s),a,s)\cdot\delta a \right) ds \end{aligned}$$

が成立する．簡単のため $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,s),a,s)$，$\frac{\partial f_i}{\partial a}(x(a,s),a,s)$ を各々 $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$，$\frac{\partial f_i}{\partial a}$ と書く．上の式から，

$$\begin{aligned} &|x_i(a+\delta a,t) - x_i(a,t) - g_i(a,t)\cdot\delta a| \\ &= \left| \int_0^t \left(f_i(x(a+\delta a,s),a+\delta a,s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\cdot(g_k(a,s)\cdot\delta a) - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right) ds \right| \\ &\le \int_0^t \left| f_i(x(a+\delta a,s),a+\delta a,s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_k \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\delta x_k - g_k(a,s)\cdot\delta a) \right| ds \end{aligned}$$

ただし，$\delta x_k = x_k(a+\delta a,s) - x_k(a,s)$ とおいた．f_i は C^1 級であることと，$\delta a \to 0$ のとき s について一様に $\delta x \to 0$ であることから，

$$\left| f_i(x(a+\delta a,s),a+\delta a,s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right| = o(|\delta a|)$$

である．しかもこの評価は s について一様である，つまり，任意の $\epsilon' > 0$ に対してある $c > 0$ が存在して $|\delta a| < c$ のとき全ての $s \in [-\epsilon, \epsilon]$ に対して

$$\left| f_i(x(a+\delta a,s),a+\delta a,s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right| \le \epsilon'|\delta a|$$

が成立する．(C^1 級関数に関する有限増分の公式 $F(x+\delta x) - F(x) = \int_x^{x+\delta x} F'(s)ds$ を用いよ．) 上の積分不等式と組み合わせて

$$|\delta x(a,t) - g(a,t)\delta a| \le \epsilon'\sqrt{n}\epsilon|\delta a| + C\int_0^t |\delta x(a,s) - g(a,s)\delta a|ds$$

ただし $C = \sup_{s\in[-\epsilon,\epsilon]} \|(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,s),a,s))_{i,k}\|$ とおき，$g(a,t) = (g_{i,j}(a,t))_{i,j}$ は行列値関数と思っている．Gronwall の不等式から

$$|\delta x(a,t) - g(a,t)\delta a| \le \epsilon' \sqrt{n}\epsilon|\delta a|e^{Ct} \le \epsilon'\sqrt{n}\epsilon e^{C\epsilon}|\delta a|$$

これは $x(a,t)$ が点 a で全微分可能で，微分係数が $g_{i,j}(a,t)$ で与えられることを示している．以上より $x(a,t)$ は $\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon,\epsilon]$ 上の C^1 級関数であることが分かった．

最後に $f(x,a,t)$ が C^∞ 級である場合に，(1) の解が C^∞ 級になることを示そう．上の議論で $x(a,t)$ が $\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon,\epsilon]$ 上の C^1 級であることは分かっている．したがって $g_{i,j}(a,t)$ の満たす微分方程式 (2) は C^1 級関数で定義されている (つまり係数に現れる関数は全て C^1 級関数)．以上で $x(a,t)$ に関して行ったのと同じ議論を $g_{i,j}(a,t)$ について繰り返せば，$g_{i,j}(a,t)$ も $\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon,\epsilon]$ 上の C^1 級関数になる．したがって $x(a,t)$ は C^2 級関数になる．さらに $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial a_k}(a,t)$ が満たす微分方程式を解析することで $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial a_k}(a,t)$ が C^1 級になることが分かり，従って $g_{i,j}$ は C^2 級，$x(a,t)$ は C^3 級となる．これを繰り返して $x(a,t)$ が C^∞ 級になることが分かる．

問題 109 (1) 常微分方程式の解が局所的に一意に存在し，また初期値に滑らかに依存すること (問題 108) から，次が言える．M の任意の点 p に対して p の開近傍 U_p と $\epsilon > 0$ が存在して $\Phi|_{U_p\times(-\epsilon,\epsilon)} \colon U_p \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ は C^∞ 級である．

$K = \Phi(\{x_0\} \times [0,t_0])$ の各点ごとに上の主張を適用すると，K は U_p, $p \in K$ で覆われる．$\Phi|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}}$ は積分曲線であり，特に連続写像である．従ってこの写像による有界閉区間の像である K はコンパクト．従って K は有限個の $U_{p_1},\dots,U_{p_N}$ により覆われる．このとき $\epsilon_i > 0$ が存在して，$\Phi|_{U_{p_i}\times(-\epsilon_i,\epsilon_i)}$ は C^∞ 級である．$\epsilon = \min(\epsilon_1,\dots,\epsilon_N)$, $V = U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_N}$ とおくとき，$\Phi|_{V\times(-\epsilon,\epsilon)}$ は C^∞ 級である．

(2) (1) より，$\varphi_{t_0/N}$ は K の開近傍 V 上で C^∞ 級である．$\varphi_{t_0/N}^{\circ k} = \overbrace{\varphi_{t_0/N} \circ \cdots \circ \varphi_{t_0/N}}^{k\text{ 回}} = \varphi_{kt_0/N}$，$1 \le k \le N$ が x_0 の近傍で C^∞ 級であることを k についての帰納法で示そう．$k = 1$ のときは明らかである．$k < N$ について $\varphi_{t_0/N}^{\circ k}$ が x_0 の開近傍 $W \subset V$ で C^∞ 級であることが示されたとする．$\varphi_{t_0/N}^{\circ k}(x_0) = \varphi_{kt_0/N}(x_0) \in K$ であり，V は K の開近傍であるから，$\varphi_{t_0/N}^{\circ k}(W') \subset V$ を満たす x_0 の開近傍 $W' \subset W$ が存在する．このとき $\varphi_{t_0/N}^{\circ(k+1)} = \varphi_{t_0/N} \circ \varphi_{t_0/N}^{\circ k}$ は W' 上で C^∞ 級である．帰納法より $\varphi_{t_0/N}^{\circ N} = \varphi_{t_0}$ は x_0 のある開近傍で C^∞ 級であることが分かった．

(3) $\Phi(x,t_0+t) = \varphi_{t+t_0}(x) = \varphi_t(\varphi_{t_0}(x)) = \Phi(\varphi_{t_0}(x),t)$ である．φ_{t_0} は x_0 のある開近傍 W で C^∞ 級である．また $\varphi_{t_0}(x_0)$ のある開近傍 U と $\epsilon > 0$ が存在して $\Phi(x,t)$ は $(x,t) \in U \times (-\epsilon,\epsilon)$ で C^∞ 級である．ここで x_0 の開近傍 $W' \subset W$ で $\varphi_{t_0}(W') \subset U$ となるものが存在する．このとき $\Phi(x,t_0+t) = \Phi(\varphi_{t_0}(x),t)$ は $(x,t) \in W' \times (-\epsilon,\epsilon)$ で C^∞ 級になる．これは $\Phi(x,t)$ が $W' \times (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ 上で C^∞ 級であることを示す．

幾何学I　演習問題 No.10 (2020年7月1日)

レポート課題 No.10　以下の**問題111**と**問題119**を解いて，7月7日(火)17:00までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 110 多様体上の C^∞ 級ベクトル場 X およびその積分曲線 $c(t)$ を考える．X の局所座標表示を $X = \sum_{i=1}^m X_i(x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $c(t)$ の局所座標表示を $(c_1(t), \ldots, c_m(t))$ とする．初期値を $c_i(0) = a_i$ とするとき，$c_i(t)$ の $t = 0$ での Taylor 展開を 2 次の項まで求めよ．

問題 111 $\varphi_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を反時計回りの角度 θ の回転，すなわち行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の左からの掛け算で与えられる線形写像とする．

(1) φ_θ が 1 パラメータ変換群を与えることを示し，対応するベクトル場を求めよ．

(2) (x, y) を $\mathbb{R}^2$ の座標とするとき，$(\varphi_\theta)_*(x\frac{\partial}{\partial x})$ の座標表示を求めよ．

(3) $\frac{d}{d\theta}(\varphi_{-\theta})_*(x\frac{\partial}{\partial x})\Big|_{\theta=0}$ を求めよ．

問題 112 M, N, Q を C^∞ 級多様体，$\varphi_1 \colon M \to N$, $\varphi_2 \colon N \to Q$ を C^∞ 級微分同相写像とする．M 上の C^∞ 級ベクトル場 X について $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_* X = \varphi_{2*}(\varphi_{1*}(X))$ を示せ．

問題 113 (r, θ) を $\mathbb{R}^2$ の極座標とする．1-form $d\theta$ を直交座標 (x, y) に関して座標表示せよ．

標準問題

問題 114 微分同相写像 $\varphi \colon M \to N$ と M 上の C^∞ 級ベクトル場 X について $\varphi_* X$ は N 上の C^∞ 級ベクトル場になることを示せ．

問題 115 授業では微分同相写像 $\varphi \colon M \to N$ と M 上の C^∞ 級ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して X の押し出し $\varphi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ を定義した．この定義が一般の C^∞ 級写像 $\varphi \colon M \to N$ に対してうまく行かないのはなぜか．

[1]PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 116 $\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級微分同相とする．M 上のベクトル場 X, Y に対して，$[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_*[X, Y]$ を示せ．(さらに余裕があれば，φ が微分同相とは限らない C^∞ 級写像のときにこの主張を一般化せよ．)

問題 117 X, Y を M 上の C^∞ 級ベクトル場，φ_t を X の flow とする．授業で示した Lie 微分についての定理

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_* Y\bigg|_{t=0} = [X, Y]$$

について，局所座標表示を使った別証明を与えよ．つまり，ある局所座標 $(x_1, \ldots, x_m)$ に関して

$$X = \sum_{i=1}^m X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^m Y_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\varphi_t(x) = (\varphi_1(x,t), \ldots, \varphi_m(x,t))$$

と座標表示し，与式の両辺を座標表示で計算して一致することを確かめよ．

問題 118 X, Y を M 上の C^∞ 級ベクトル場，φ_t, ψ_t を各々X, Y の flow とする．s, t が小さいとき近似式

$$\psi_s \circ \varphi_t - \varphi_t \circ \psi_s \approx st[X, Y]$$

が成立する，という主張を (適当に解釈した上で) 説明せよ．(一つの可能な解釈は，両辺を局所座標表示することによって与えられる．)

問題 119 $\mathbb{C}$ の座標を $z = x + \sqrt{-1}y$ とおく．$\mathbb{C}$ 上の 1-form

$$\alpha = \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の C^∞ 級 1-form に拡張されることを示せ．

問題 120 S^1 上の角度座標 $\theta \mapsto e^{\sqrt{-1}\theta} \in S^1$ に対して，$d\theta$ は S^1 上の well-defined な 1 次微分形式を与える．(角度座標 θ そのものは大域的に well-defined な関数ではないことに注意しよう．) $d\theta = df$ を満たす関数 $f \in C^\infty(S^1)$ は存在しないことを示せ．

問題 121 M を第二可算公理を満たす C^∞ 級多様体，α を C^∞ 級の 1 次微分形式で，全ての点 $p \in M$ に対して $\alpha_p \neq 0$ となるものとする．このとき C^∞ 級ベクトル場 X で $\alpha(X) = 1$ を満たすものが存在することを示せ．

問題 122 M を C^∞ 級多様体，$X_1, \ldots, X_m$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場で全ての i, j に対して $[X_i, X_j] = 0$ を満たすものとする．点 $p \in M$ において $(X_1)_p, \ldots, (X_m)_p$ が T_pM の基底であるとき，p の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ が存在して U 上で $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ となることを示せ．

幾何学 I　演習問題 No.10 略解

問題 110 $c(t)$ の微分方程式は次で与えられる．

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = X_i(c_1(t), \ldots, c_m(t))$$

従って $c_i(0) = a_i$ を用いて

$$\frac{dc_i}{dt}(0) = X_i(a_1, \ldots, a_m)$$
$$\frac{d^2c_i}{dt^2}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(c_1(t), \ldots, c_m(t))\frac{dc_j}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(c_1(t), \ldots, c_m(t))X_j(c_1(t), \ldots, c_m(t))$$

ゆえ

$$\frac{d^2c_i}{dt^2}(0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_m)X_j(a_1, \ldots, a_m)$$

従って Taylor 展開を t の 2 次まで与えると，

$$c_i(t) = a_i + X_i(a_1, \ldots, a_m)t + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_m)X_j(a_1, \ldots, a_m)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

問題 111 (1) 1 パラメータ変換群であることを示すには，$\varphi_{\theta_1+\theta_2} = \varphi_{\theta_1} \circ \varphi_{\theta_2}$, $\varphi_0 = \mathrm{id}$ を示せばよいがこれは容易である．対応するベクトル場は

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{d\theta}\varphi_\theta(x,y)\right|_{\theta=0} &= \left.\frac{d}{d\theta}(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\right|_{\theta=0} \\ &= \left.(-x\sin\theta - y\cos\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\theta=0} \\ &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

(2) 定義に基づいて $(\varphi_\theta)_*(x\frac{\partial}{\partial x})$ の点 $p = (x_0, y_0)$ での値を計算する．

$$\begin{aligned} \left((\varphi_\theta)_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)_p &= (d_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\varphi_\theta)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi_\theta^{-1}(p)} \\ &= (d_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\varphi_\theta)\left[x(\varphi_\theta^{-1}(p))\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\right] \end{aligned}$$

φ_θ は線形写像であるから，$d_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\varphi_\theta$ は (基底 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ に関して) φ_θ の表現行列と同じ行列で表現される線形写像である．従って

$$\begin{aligned} &= (x_0\cos\theta + y_0\sin\theta)\left(\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) \\ &= (x_0\cos^2\theta + y_0\cos\theta\sin\theta)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + (x_0\cos\theta\sin\theta + y_0\sin^2\theta)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \end{aligned}$$

従って

$$(\varphi_\theta)_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) = (x\cos^2\theta + y\cos\theta\sin\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (x\cos\theta\sin\theta + y\sin^2\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$= \frac{1}{2}\left((x(1+\cos 2\theta) + y\sin 2\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (x\sin 2\theta + y(1-\cos 2\theta))\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

(3) **(解 1)**: (2) の計算結果から

$$\frac{d}{d\theta}(\varphi_{-\theta})_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\bigg|_{\theta=0} = -y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

である．

(解 2): (1) より φ_θ はベクトル場 $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ の生成する 1 パラメータ変換群である．従って求めるものはこのベクトル場による Lie 微分であり，それはベクトル場の交換子積で与えられる．

$$\frac{d}{d\theta}(\varphi_{-\theta})_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\bigg|_{\theta=0} = \mathcal{L}_{-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$
$$= \left[-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}\right]$$
$$= -y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

採点基準　各小問 1 点で計 3 点．(1) は 1 パラメータ変換群の条件 $\varphi_{\theta_1+\theta_2} = \varphi_{\theta_1}\circ\varphi_{\theta_2}$, $\varphi_0 = \mathrm{id}$ が述べられており (述べているだけで十分)，対応するベクトル場が正しく計算されていればよい．(2) は定義に従って正しく計算できているかどうか (倍角公式で書きなおす必要はない)，(3) は正しく計算できているかどうかを見る．

問題 112 点 $q \in Q$ での両辺の値を比べる．$\varphi_1^{-1}(q) = p \in N$, $\varphi_2^{-1}(p) = r \in M$ とおくとき，

$$((\varphi_2\circ\varphi_1)_*X)_q = d_r(\varphi_2\circ\varphi_1)(X_r)$$
$$= d_p\varphi_2(d_r\varphi_1(X_r))$$
$$= d_p\varphi_2(\varphi_{1*}X)_p$$
$$= (\varphi_{2*}(\varphi_{1*}X))_q$$

問題 113 $\theta = \arctan(y/x)$ より

$$d\theta = \frac{1}{1+(y/x)^2}d(y/x) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

問題 114 $p \in M$, $q \in N$, $\varphi(p) = q$ とし，点 p の周りの座標近傍 $(U; x_1,\ldots,x_m)$, 点 q の周りの座標近傍 $(V; y_1,\ldots,y_m)$ とする．φ は微分同相なので $\varphi(U) = V$ としてよい．(U を $U\cap\varphi^{-1}(V)$ で置き換え，V を $V\cap\varphi(U)$ で置き換えればよい.）これら二つのチャートに関する φ の座標表示を

$$y_i = \varphi_i(x_1,\ldots,x_m)$$

とし，逆写像の座標表示を

$$x_i = (\varphi^{-1})_i(y_1,\ldots,y_m)$$

とする．また $X = \sum_{i=1}^m X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ を X の U 上での座標表示とする．このとき

$$
\begin{aligned}
(\varphi_* X)_y &= (d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi)X_{\varphi^{-1}(y)} \\
&= (d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi)\sum_{i=1}^m X_i(\varphi^{-1}(y))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi^{-1}(y)} \\
&= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m X_i(\varphi^{-1}(y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(y))\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_y
\end{aligned}
$$

ここで $\varphi^{-1}(y)$ は正確には $((\varphi^{-1})_1(y_1,\dots,y_m),\dots,(\varphi^{-1})_m(y_1,\dots,y_m))$ である．この座標表示から $\varphi_* X$ は C^∞ 級ベクトル場．

問題 115 $\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して押し出し $\varphi_* X$ を定義したいとすると，それは次の性質をもつべきである．

$$
(\varphi_* X)_{\varphi(p)} = d_p\varphi(X_p)
$$

ここで，もし φ が単射でなければ $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$, $p_1 \neq p_2$ を満たす 2 点 $p_1, p_2 \in M$ が存在することになるが，$d_{p_1}\varphi(X_{p_1})$, $d_{p_2}\varphi(X_{p_2})$ は一般には異なるため，定義が well-defined ではない．

また，φ が全射でなければ，φ の像に入らない点 $q \in N$ に対して $(\varphi_* X)_q$ をどのように定めればよいか不定性が残る．

問題 116 $\varphi\colon M \to N$ が微分同相のとき，ベクトル場を C^∞ 級関数への作用素とみなすと，$\varphi_* X = (\varphi^*)^{-1} \circ X \circ \varphi^*$ が成り立つことを使えば直ちに従う．

$\varphi\colon M \to N$ が一般の C^∞ 級写像のとき．$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $X' \in \mathfrak{X}(N)$ が φ で関係しており，$Y \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y' \in \mathfrak{X}(N)$ が φ で関係しているとき $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ と $[X', Y'] \in \mathfrak{X}(N)$ が φ で関係する．これもベクトル場を関数への作用素と思ったときの関係式 $\varphi^* \circ X' = X \circ \varphi^*$, $\varphi^* \circ Y' = Y \circ \varphi^*$ から直ちに従う．

問題 118 (余り厳密ではない説明 1)　局所座標 $(x^1,\dots,x^m)$ で表示したとき，各点 x に対して

$$
\psi_s^i(\varphi_t(x)) - \varphi_t^i(\psi_s(x)) \approx st[X,Y]^i(x)
$$

となることを説明しよう．ここで上付きの添え字 i は座標表示の i 成分を表す．(ベクトル場 $[X,Y]$ については，基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ で展開したときの i 番目の成分である．) s, t が非常に小さいとき，flow φ_t, ψ_s は Taylor 展開より次の式で近似される．

$$
\varphi_t^i(x) \approx x^i + tX^i(x), \qquad \psi_s^i(x) \approx x^i + sY^i(x)
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\psi_s^i(\varphi_t(x)) &\approx \varphi_t^i(x) + sY^i(\varphi_t(x)) \approx x^i + tX^i(x) + sY^i(x + tX(x)) \\
&\approx x^i + tX^i(x) + sY^i(x) + st(\partial_X Y^i)(x) \\
\varphi_t^i(\psi_s(x)) &\approx \psi_s^i(x) + tX^i(\psi_s(x)) \approx x^i + sY^i(x) + tX^i(x + sY(x)) \\
&\approx x^i + sY^i(x) + tX^i(x) + st(\partial_Y X^i)(x)
\end{aligned}
$$

ただし，$(\partial_X Y^i)(x) = \sum_{j=1}^m X^j(x)(\partial_{x^j} Y^i)(x)$ 等は X 方向への方向微分を表す．以上より

$$
\psi_s^i(\varphi_t(x)) - \varphi_t^i(\psi_s(x)) \approx st((\partial_X Y^i)(x) - (\partial_Y X^i)(x)) = st[X,Y]^i(x)
$$

(もう少し正確な説明 2) 上の計算では Taylor 展開の 2 次の項までを見ているので，正確には $\varphi_t(x)$，$\psi_s(x)$ の Taylor 展開の 2 次までを見ないといけない．つまり問題 110 にあるように

$$\varphi_t^i(x) \approx x^i + tX^i(x) + \frac{t^2}{2}\partial_X X^i(x), \qquad \psi_s^i(x) \approx x^i + sY^i(x) + \frac{s^2}{2}\partial_Y Y^i(x)$$

と展開して，以上と同様に (Taylor 展開の 2 次までを) 計算すると，

$$\begin{aligned}
\psi_s^i(\varphi_t(x)) &\approx \varphi_t^i(x) + sY^i(\varphi_t(x)) + \frac{s^2}{2}(\partial_Y Y^i)(\varphi_t(x)) \\
&\approx x^i + tX^i(x) + sY^i(x) + \frac{t^2}{2}(\partial_X X^i)(x) + st(\partial_X Y^i)(x) + \frac{s^2}{2}(\partial_Y Y^i)(x) \\
\varphi_t^i(\psi_s(x)) &\approx \psi_s^i(x) + tX^i(\psi_s(x)) + \frac{t^2}{2}(\partial_X X^i)(\psi_s(x)) \\
&\approx x^i + sY^i(x) + tX^i(x) + \frac{t^2}{2}(\partial_X X^i)(x) + st(\partial_Y X^i)(x) + \frac{s^2}{2}(\partial_Y Y^i)(x)
\end{aligned}$$

となって結果は同じである．

(数学的に厳密な説明 3)　与えられた近似式を次のように解釈する．任意の x の近傍で定義された任意の C^∞ 級関数 f に対して $(s,t) \to (0,0)$ のとき，

$$f(\psi_s(\varphi_t(x)) - f(\varphi_t(\psi_s(x))) = st([X,Y]f)(x) + o(s^2+t^2)$$

が成立する．つまり，右辺は左辺の (s,t) に関する 2 次までの Taylor 展開になっている．s,t が十分小さいとき，$f(\varphi_t(\psi_s(x)))$, $f(\psi_s(\varphi_t(x)))$ は意味をもち，(s,t) の C^∞ 級関数になることに注意したい．上の説明 1・2 は f が座標関数 x^i であるときの特別の場合になっている．

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} f(\psi_s(\varphi_t(x)))\right|_{s=0} = (Yf)(\varphi_t(x))$$

であるから

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} f(\psi_s(\varphi_t(x)))\right|_{s=t=0} = (X(Yf))(x)$$

が言える．同様にして

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right|_{s=t=0} = (Y(Xf))(x)$$

が言える．従って

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x))))\right|_{s=t=0} = ([X,Y]f)(x)$$

である．また

$$\left. f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right|_{s=0} = 0$$

であるから

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right)\right|_{s=t=0} = 0, \qquad \forall k \geq 0$$

が言える．同様にして

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial s^k}\left(f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right)\right|_{s=t=0} = 0, \qquad \forall k \geq 0$$

が言える．これらの計算から上の Taylor 展開が従う．

問題 119 $\widehat{\mathbb{C}}$ の ∞ のまわりの座標を $w = s + \sqrt{-1}t$ とおく．$z = x + \sqrt{-1}y$ と $w = s + \sqrt{-1}t$ は座標変換 $w = 1/z$ により関係している．

$$x + \sqrt{-1}y = \frac{1}{s + \sqrt{-1}t} = \frac{s}{s^2 + t^2} - \sqrt{-1}\frac{t}{s^2 + t^2}$$

与えられた 1-form α は座標 (x, y) について明らかに C^∞ 級である．α を座標 (s, t) で表示すると，$(s, t) \neq (0, 0)$ のとき，

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^2} &= \frac{d\left(\frac{s}{s^2+t^2}\right)}{(1 + (\frac{s}{s^2+t^2})^2 + (\frac{-t}{s^2+t^2})^2)^2} \\ &= (s^2 + t^2)^2 \frac{(s^2 + t^2)ds - s(2sds + 2tdt)}{((s^2 + t^2)^2 + s^2 + t^2)^2} = \frac{(t^2 - s^2)ds - 2stdt}{(1 + s^2 + t^2)^2}\end{aligned}$$

係数に現れる関数 $\frac{t^2 - s^2}{(1+s^2+t^2)^2}$，$\frac{-2st}{(1+s^2+t^2)^2}$ は $s = t = 0$ のまわりに C^∞ 級に拡張される．従って α は $s = t = 0$ に C^∞ 級に拡張されることが分かった．

$\boxed{\text{採点基準}}$　1 点．α が無限遠点の近傍で C^∞ 級であることを (具体的に計算して) 確かめているかどうか．

幾何学 I　演習問題 No.11 (2020 年 7 月 8 日)

<u>レポート課題 No.11</u>　以下の**問題 124** と**問題 127** を解いて，7 月 14 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

<u>基本問題</u>

問題 123 M, N, Q を C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ を C^∞ 級写像とする．Q 上の 1 次微分形式 α に対して $(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha)$ を示せ．

問題 124 次の微分形式を計算せよ．($\varphi^*(\alpha\wedge\beta) = \varphi^*\alpha\wedge\varphi^*\beta, d\varphi^*(\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$ を使う．)

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の 1 次微分形式 $xdy - ydx$ を極座標 (r, θ) で座標表示せよ．

(2) (x, y, z) を $\mathbb{R}^3$ の座標とする．$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\varphi(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ とおく．$\varphi^*(dy \wedge dz)$ を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の 1 次微分形式 $\alpha = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$ に対して $d\alpha$ を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式 $\beta = f(x, y, z)dy\wedge dz + g(x, y, z)dz\wedge dx + h(x, y, z)dx\wedge dy$ に対して $d\beta$ を求めよ．

(5) $\mathbb{R}^6$ 上の微分形式 $\omega = dx_1\wedge dx_2 + dx_3\wedge dx_4 + dx_5\wedge dx_6$ に対して，$\omega\wedge\omega\wedge\omega$ を求めよ．

<u>標準問題</u>

問題 125 V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．$\bigwedge^k V$ は次の「universal mapping property」を持つことを示せ．授業では $\bigwedge^k V$ を V の基底を用いて定義したが，この性質により $\bigwedge^k V$ は基底の取り方によらないことが分かる．

　任意のベクトル空間 W と，多重線形性と反対称性を満たす写像 $\varphi\colon V^k \to W$ に対して線形写像 $\tilde{\varphi}\colon \bigwedge^k V \to W$ であって次の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ \bigwedge^k V \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで縦の写像 $\pi\colon V^k \to \bigwedge^k V$ は $\pi(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$．

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 126 有限次元ベクトル空間の間の線形写像 $f\colon V \to W$ に対して線形写像 $f\colon \bigwedge^k V \to \bigwedge^k W$ であって $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ を $f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k)$ に写すものがただ一つ存在する．これを universal mapping property を使って示せ.

問題 127 $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式 α を

$$\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

とおく．$i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする．S^2 の北極からの立体射影の与える座標 $\varphi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ によって $i^*\alpha$ を座標表示せよ．ただし No.1, 問題 6 の答え (とそこで使った計算) を用いてよい.

問題 128 $\mathbb{R}^n$ の開集合上の C^∞ 級関数 $f_i(x_1, \ldots, x_n)$，$1 \leq i \leq k$ に対して次を示せ.

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \frac{\partial(f_1, f_2 \ldots, f_k)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

ただし

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_k)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_k}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_k}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_r}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{i_r}} \end{vmatrix}$$

問題 129 M, N を C^∞ 級多様体，$\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級写像，ω を N 上の C^∞ 級の k 次微分形式とする．M の局所座標 $(x_1, \ldots, x_m)$，N の局所座標 $(y_1, \ldots, y_n)$ をとり，α および φ の局所表示を各々

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1, \ldots, i_k}(y_1, \ldots, y_n) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$
$$y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m), \quad 1 \leq j \leq n$$

とする．前問の結果を使って $\varphi^*\alpha$ の局所表示を与え，α が C^∞ 級ならば $\varphi^*\alpha$ も C^∞ 級であることを示せ.

問題 130 V を有限次元実ベクトル空間．V^* をその双対空間とする．$v \in V$ に対して線形写像 $i(v)\colon \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$ で次の性質を満たすものがただ一つ存在することを示せ．$i(v)$ を**内部積**という.

(1) $\varphi \in V^*$ に対して $i(v)\varphi = \varphi(v)$.

(2) $\alpha \in \bigwedge^k V^*, \beta \in \bigwedge^l V^*$ に対し $i(v)(\alpha \wedge \beta) = (i(v)\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i(v)\beta)$.

発展問題

問題 131 V を有限次元ベクトル空間とする．$\bigwedge^k V$ の元 x が $v_1, \ldots, v_k \in V$ を用いて $x = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ と書けるとき x は分解可能であるという．$x \in \bigwedge^k V$ が分解可能であることと，任意の $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1} \in V^*$ に対して

$$(i(\varphi_1)i(\varphi_2)\cdots i(\varphi_{k-1})x) \wedge x = 0$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

問題 132 $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2+|w|^2 = 1\}$ を 3 次元球面，$\pi\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1 \cong \widehat{\mathbb{C}}$，$\pi(z, w) = [z, w]$ を Hopf 写像とする．(問題 33,56 も参照)．$i\colon S^3 \to \mathbb{C}^2$ を包含写像とし，$\mathbb{C}^2$ の座標を $(x_1 + \sqrt{-1}x_2, x_3 + \sqrt{-1}x_4)$ とおく．

$$i^*(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) = \pi^*\omega$$

を満たす S^2 上の 2 次微分形式 ω が存在することを示せ.

幾何学 I　演習問題 No.11 略解

問題 123

$$\begin{aligned}((g\circ f)^*\alpha)_p &= \alpha_{g\circ f(p)}\circ d_p(g\circ f)\\ &= \alpha_{g(f(p))}\circ d_{f(p)}g\circ d_pf\\ &= (g^*\alpha)_{f(p)}\circ d_pf = (f^*(g^*\alpha))_p\end{aligned}$$

問題 124　(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より

$$xdy - ydx = r\cos\theta\, d(r\sin\theta) - r\sin\theta\, d(r\cos\theta) = r^2 d\theta.$$

(2)

$$\begin{aligned}\varphi^*(dy\wedge dz) &= d(\varphi^*(y))\wedge d(\varphi^*(z))\\ &= d(xy)\wedge d(xyz)\\ &= (xdy+ydx)\wedge(yzdx+xzdy+xydz)\\ &= xy^2dx\wedge dz + x^2ydy\wedge dz\end{aligned}$$

(3)

$$d\alpha = \left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$d\alpha$ は rotation の計算に対応することに注意しよう．

(4)

$$d\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

$d\beta$ は divergence の計算に対応することに注意しよう．

(5)

$$\omega\wedge\omega\wedge\omega = 6dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5\wedge dx_6$$

採点基準　計 3 点．(1)-(2) が両方できて 1 点，(3)-(4) が両方できて 1 点，(5) ができて 1 点．正しく計算できていればよい．[(3)-(4) については座標表示まで求めてもらうことを意図しているが，df のまま残している解答も間違いではないので減点しない．] 最後の答えを書き写すときのミス等，極めて軽微なミスについては減点しなくてもよい．

問題 125 $e_1,\ldots,e_n$ を V の基底とする．授業では

$$\bigwedge^k V = \bigoplus_{i_1<\cdots<i_k}\mathbb{R}\, e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$$

と定めたのであった．もし問題の性質を満たすような $\tilde\varphi$ が存在すれば，可換図式から $i_1<\cdots<i_k$ に対して $\tilde\varphi(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}) = \varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})$ である．このことから $\tilde\varphi$ は存在すれば一意的に決まることが分かる．次に $\tilde\varphi$ を基底 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ $(i_1<\cdots<i_k)$ を $\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})\in W$ に送る線形写像として定めたときに，問題にある可換図式を満たすことを示す．まず (単調増加とは限らない) 任意の組 $(j_1,\ldots,j_k)\in\{1,\ldots,n\}^k$ に対して

$$\varphi(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}) = \tilde\varphi(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k})$$

であることに注意しておく．これは φ の反対称性から明らかである．任意の $v_1,\dots,v_k\in V$ に対して $v_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}e_j$ とおくとき，

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)&=\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_k=1}^n a_{1,j_1}\cdots a_{k,j_k}\tilde{\varphi}(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k})\\&=\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_k=1}^n a_{1,j_1}\cdots a_{k,j_k}\varphi(e_{j_1},\dots,e_{j_k})=\varphi(v_1,\dots,v_k).\end{aligned}$$

以上により示された．

問題 126 写像 $V^k\to\bigwedge^k W$，$(v_1,\dots,v_k)\mapsto f(v_1)\wedge\cdots\wedge f(v_k)$ が多重線形性と反対称性を満たすことをチェックすればよい．

問題 127 φ の逆写像は $\varphi^{-1}(x,y)=(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$ であたえられた．与えられた問題は $(\varphi^{-1})^*\alpha$ を求めることである．

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1})^*\alpha&=(\varphi^{-1})^*(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)\\&=\frac{2x}{1+x^2+y^2}d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\\&\quad+\frac{2y}{1+x^2+y^2}d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\wedge d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\\&\quad+\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

であるが，

$$d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)=d\left(1-\frac{2}{x^2+y^2+1}\right)=-2d\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}\right)$$

より

$$\begin{aligned}d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)&=\left(\frac{2dy}{1+x^2+y^2}+2yd\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)\right)\wedge d\left(\frac{-2}{x^2+y^2+1}\right)\\&=(-2)\frac{2dy}{1+x^2+y^2}\wedge d\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}\right)\\&=\frac{4dy\wedge(2xdx+2ydy)}{(1+x^2+y^2)^3}=\frac{-8xdx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

同様に

$$d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\wedge d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)=\frac{-8ydx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}$$

また

$$\begin{aligned}&d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\\&=\left(\frac{2dx}{1+x^2+y^2}-\frac{2x(2xdx+2ydy)}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\wedge\left(\frac{2dy}{1+x^2+y^2}-\frac{2y(2xdx+2ydy)}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\\&=\frac{4dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}-\frac{8y^2dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}-\frac{8x^2dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}\\&=\frac{4(1-x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}dx\wedge dy\end{aligned}$$

以上の計算を合わせて

$$
\begin{aligned}
(\varphi^{-1})^*\alpha &= \left(\frac{-16x^2}{(1+x^2+y^2)^4} + \frac{-16y^2}{(1+x^2+y^2)^4} - \frac{4(x^2+y^2-1)^2}{(1+x^2+y^2)^4} \right) dx \wedge dy \\
&= \frac{-4dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

が得られる．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 1 点．最終計算結果が正しくなければ 0 点．最終の結果として書かれた式が正しいがきれいな形になっていない場合，分母分子を約分してこの答が得られる程度 (例えば分母が $(1+x^2+y^2)^4$ で分子に $(1+x^2+y^2)^2$ を展開したものが現れるなど) であれば減点しない．結果が正しくても計算途中とみなされるような答え (例えば通分していない，$dx \wedge dy$ と $dy \wedge dx$ をまとめていない，など) は 0 点とする．

問題 128 $df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ である．外積の多重線形性を使って $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$ を展開し，さらに反対称性を用いて基底 $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ の線形結合としてあらわすことを考える．このとき $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ の係数は，

$$
\operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}}
$$

を全ての k 次の置換 σ にわたってたしあげたものである．このことから主張は明らかである．

問題 129 $p \in M$ をとる．$(\varphi^*\alpha)_p$ は $\alpha_{\varphi(p)} \in \bigwedge^k T^*_{\varphi(p)} N$ を $d_p\varphi \colon T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ の誘導する線形写像 $(d_p\varphi)^* \colon \bigwedge^k T^*_{\varphi(p)}N \to \bigwedge^k T^*_p M$ によって写した像である．

$$
\begin{aligned}
(\varphi^*\alpha)_p = (d_p\varphi)^*\alpha_{\varphi(p)} &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi(p))(d_p\varphi)^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi(p))(d_p\varphi)^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (d_p\varphi)^*(dy_{i_k})
\end{aligned}
$$

ここで $(d_p\varphi)^* dy_{i_a} = \varphi^*(dy_{i_a}) = d(\varphi^* y_{i_a}) = d\varphi_{i_a}$ に注意すると，これは

$$
\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi(p)) d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}
$$

前問の結果を使って座標表示すれば，

$$
\varphi^*\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}
$$

この表示から「α が C^∞ 級 $\Longrightarrow$ $\varphi^*\alpha$ が C^∞ 級」は明らか．

問題 130 一意性はほぼ明らかである．実際 $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \in \bigwedge^k V^*$, $\omega_i \in V^*$ に対して

$$
i(v)\omega = \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \omega_l(v) \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_l \wedge \cdots \wedge \omega_k
$$

となることが性質 (1), (2) からすぐわかる．逆に $e_1, \ldots, e_n$ を V の基底，$e_1^*, \ldots, e_n^*$ を V^* の双対基底とし，

$$
i(v)(e^*_{j_1} \wedge \cdots e^*_{j_k}) := \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} e^*_{j_l}(v) \cdot e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \check{e}_{j_l} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}
$$

と定めて $\bigwedge^k V^*$ 全体に線形に拡張するとき，性質 (1), (2) を満たすことを示せばよい．

幾何学 I　演習問題 No.12 (2020 年 7 月 15 日)

レポート課題 No.12　以下の**問題 135** と**問題 140** を解いて，7 月 21 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 133 α を滑らかな 1-form, ω を滑らかな 2-form, X, Y, Z を滑らかなベクトル場とする．次が成り立つことを問題 138, 問題 140 の結果を利用して確認せよ．

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \omega)(X, Y, Z) &= \alpha(X)\omega(Y, Z) + \alpha(Y)\omega(Z, X) + \alpha(Z)\omega(X, Y)\\ d\alpha(X, Y) &= X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])\\ d\omega(X, Y, Z) &= X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y)\\ &\quad - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)\end{aligned}$$

問題 134 V を n 次元実ベクトル空間とする．V の向きと，$\bigwedge^n V$ の向きの間に自然な一対一対応があることを示せ．また V の向きと，双対空間 V^* の向きの間に自然な一対一対応があることを示せ．

問題 135 $\mathbb{C}^n$ を実ベクトル空間とみて，その基底 $(e_1, \sqrt{-1}e_1, e_2, \sqrt{-1}e_2, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_n)$ によって向きを定める．ただし $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の ($\mathbb{C}$ 上の) 標準基底を表す．$\mathbb{R}$ 上の線形同型写像 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ を $f(z_1, \ldots, z_n) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ と定める．ただし $z_k = x_k + \sqrt{-1}y_k$ とした．$\mathbb{R}^{2n}$ に標準的な向き (つまり標準基底 $e_1, \ldots, e_{2n}$ による向き) を与えるとき，同型写像 f が向きを保つために自然数 n の満たすべき条件を求めよ．

問題 136 X をコンパクト位相空間，$\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ を局所有限な X の被覆とする．(V_α は開集合とは仮定しない．) このとき $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq \emptyset\}$ は有限集合であることを示せ．

標準問題

問題 137 V を $\mathbb{R}$ ベクトル空間，V^* を V の双対空間，$e_1^*, \ldots, e_n^*$ を V^* の基底とする．$I = (i_1, \ldots, i_k)$ に対して V 上の k 次の反対称形式 $\varphi_I\colon V^k \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_I(v_1, \ldots, v_k) = \det\left(e_{i_a}^*(v_b)\right)_{1 \le a, b \le k}$$

と定める．I が $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ を満たす全ての組 $(i_1, \ldots, i_k)$ を動くとき φ_I たちは V 上の全ての k 次の反対称形式のなす $\mathbb{R}$ ベクトル空間の基底をなすことを示せ．

[1]PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 138 V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．V^* を V の双対空間とする．$\bigwedge^k V^*$ の元を授業で説明したとおり V^k 上の反対称形式と見なす．ただし，授業での定義は $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \bigwedge^k V^*$ を $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \det((\varphi_i(v_j))_{1 \le i,j \le k})$ なる反対称形式と見なすものであった．$\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\eta \in \bigwedge^l V^*$ および $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$ に対して

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

が成り立つことを示せ．

問題 139 $\mathbb{R}^4$ 上の 2 次微分形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$ を考える．

(1) 1 次微分形式 α, β であって $\omega = \alpha \wedge \beta$ を満たすものは存在しないことを示せ．（ヒント：$\omega \wedge \omega$ を計算する．）

(2) 4 次正方行列 A で表現される線形写像 $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ に対して，

$$f^*\omega = \omega \quad \Longleftrightarrow \quad {}^tAJA = J$$

を示せ．ただし $J = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$ は 4 次正方行列．（ヒント：ω の与える反対称形式を考える．）

問題 140 C^∞ 級 k 次微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ および C^∞ 級ベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して次の公式が成り立つことを示そう．

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

まず各々の座標近傍上で両辺が等しいことを示せばよいことに注意する．つまり座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$ をとり，$X_1, \dots, X_{k+1}$ を U 上のベクトル場，ω を U 上の微分形式として等式を示せばよい．

(1) 右辺は $X_1, \dots, X_{k+1}$ の各々について $C^\infty(U)$ 線形であることを示せ．

(2) 右辺は $X_1, \dots, X_{k+1}$ の置換について反対称であることを示せ．

(3) 上の等式を $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}$，$i_1 < \cdots < i_{k+1}$ のときに示し，これから任意の $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(U)$ に対して成り立つことを結論せよ．

問題 141 M を m 次元 C^∞ 級多様体，$X_1, \ldots, X_m$ を M の C^∞ 級ベクトル場で M の各点で接空間の基底をなすものとする．$\theta_1, \ldots, \theta_m$ を M の 1 次微分形式で M の各点で $X_1, \ldots, X_m$ の双対基底となるものとする．

(1) θ_i は C^∞ 級の 1 次微分形式であることを示せ．

(2) C^∞ 級関数 $a_{i,j,k} \in C^\infty(M)$ に対して $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n a_{i,j,k} X_k$ が成り立つとき，次を示せ．

$$d\theta_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{j,k,i}\theta_j \wedge \theta_k = 0$$

問題 142 $[0,1] \times (-1,1)$ に次の関係の生成する同値関係を定める．

$$(0,x) \sim (1,-x), \quad x \in (-1,1).$$

この同値関係に関する商位相空間 $M = [0,1] \times (-1,1)/\sim$ は Möbius の帯と呼ばれる．M に C^∞ 級多様体の構造を定め，M が向きづけ不可能であることを示せ．

問題 143 $\mathbb{R}^3$ の 2 次微分形式 $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ を考える．

(1) 点 $p \in \mathbb{R}^3$ に対して $\omega_p(v,w) = \det(p,v,w)$ であることを示せ．ただし p, v, w は 3 次元縦ベクトルとみなしている．

(2) $A \in GL(3,\mathbb{R})$ に対して $f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p \mapsto Ap$ を A の定める線形写像とする．$f_A^*\omega = \det(A)\omega$ を示せ．

(3) $i \colon S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を包含写像とし，$\eta = i^*\omega$ とおく．η は S^2 の至る所消えない 2 次微分形式であることを示せ．ただし，η が至る所消えないとは任意の $p \in S^2$ に対して $\eta_p \neq 0$ であること．

発展問題

問題 144 X を C^∞ 級ベクトル場，φ_t を X の flow とする．C^∞ 級 k-form ω に対して

$$\mathcal{L}_X\omega := \left.\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega\right|_{t=0}$$

を ω の X による Lie 微分という．$\mathcal{L}_X\omega$ は C^∞ 級 k-form である．次を示せ．

(1) $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$

(2) $\mathcal{L}_X(d\alpha) = d(\mathcal{L}_X\alpha)$

問題 145 問題 130 の内部積を使って，ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と k-form $\omega \in \Omega^k(M)$ の内部積 $i(X)\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ が

$$(i(X)\omega)_p := i(X_p)\omega_p$$

と定義される．微分形式の Lie 微分に関する Cartan の公式

$$\mathcal{L}_X\omega = (i(X)d + di(X))\omega$$

を示せ.

幾何学 I　演習問題 No.12 略解

問題 133 略

問題 134 V の基底 $(v_1,\dots,v_n)$ の定める向きに対して $\bigwedge^n V$ の基底 $v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ の定める向きを対応させる写像が well-defined であることを示せばよい．

またV の基底 $(v_1,\dots,v_n)$ の定める向きに対してその双対基底 $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ の定める向きを対応させる写像が well-defined であることを示せばよい．同じ向きを与える別の基底 $(w_1,\dots,w_n)$ をとる．$w_j=\sum_i a_{i,j}v_i$ とすると $\det((a_{i,j})_{i,j})>0$ である．このとき $v_i^*=\sum_j a_{i,j}w_j^*$ であることが，w_j での値を見ることで分かる．したがって $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ と $(w_1^*,\dots,w_n^*)$ は同じ向きを定める．

問題 135 線形写像 f を正の向きの基底に関して座標表示すると

$$(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)\mapsto(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$$

なる形で与えられる．この写像は置換行列で表現され，f が向きを保つのはこの置換の符号が 1 であるときである．この置換の符号は $(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=(-1)^{n(n-1)/2}$ である．従って

$$f \text{ が向きを保つ} \iff n(n-1)/2 \text{ が偶数} \iff n\equiv 0 \text{ or } 1 \pmod 4$$

$\boxed{\text{採点基準}}$ 1 点．置換の符号を求めて正しい条件を得ているかを見る．「$n(n-1)/2$ が偶数」と「$n\equiv 0,1$」のどちらでもよい．(あるいはこれ以外でも n に関する簡明な正しい条件になっていればよい．)

問題 136 局所有限被覆の定義から，X の各点 x に対して x の開近傍 U_x で $A_x=\{\alpha\in A: V_\alpha\cap U_x\neq\emptyset\}$ が有限集合であるものが存在する．X のコンパクト性から $X=U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m}$ とできる．このとき $V_\alpha\neq\emptyset$ であれば $V_\alpha\cap U_{x_i}\neq\emptyset$ なる i が存在する．従って $\alpha\in A_{x_i}$．すなわち α は有限集合 $A_{x_1}\cup\cdots\cup A_{x_m}$ に属する．

問題 137 $e_1,\dots,e_n$ を V の基底で $e_1^*,\dots,e_n^*$ の双対基底になるものとする．大文字 I,J により $I=(i_1<i_2<\cdots<i_k)$，$J=(j_1<j_2<\cdots<j_k)$ なる組を表すことにし，$e_J=(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$ などとおく．このとき $\varphi_I(e_J)=\delta_{I,J}$ であることに注意しよう．まず φ_I たちが一次独立であることを見る．$\sum_I c_I\varphi_I=0$ であれば e_J での値を見て $c_J=0$ が分かる．よって φ_I は一次独立．次に φ_I たちが k 次反対称形式全体を生成することを見る．$\omega\colon V^k\to\mathbb{R}$ を反対称形式とする．$\omega=\sum_I\omega(e_I)\varphi_I$ であることを示せばよい．まず，両辺は e_J で同じ値を持つ．反対称性と多重線形性から，ω は全ての J に対する e_J での値 $\omega(e_J)$ から一意に決定されるため，等式が言える．

問題 138 $\omega=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k$，$\eta=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_l$ のときに示せば十分である．(一般の ω,η はこのような形の元の和になり，示したい式の両辺は ω,η 各々について線形であるから．) $\omega\wedge\eta$ は $\omega_1,\dots,\omega_k$ の置換について反対称，$\eta_1,\dots,\eta_l$ の置換について反対称であることに注意する．つまり $\omega\wedge\eta=\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\rho)\omega_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(k)}\wedge\eta_{\rho(1)}\wedge\cdots\wedge\eta_{\rho(l)}$ が全ての $\tau\in S_k$，$\rho\in S_l$ について成立する．従って τ,ρ にわたってこれを平均化すると，

$$\omega\wedge\eta=\frac{1}{k!l!}\sum_{\tau\in S_k,\rho\in S_l}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\rho)(\omega_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(k)}\wedge\eta_{\rho(1)}\wedge\cdots\wedge\eta_{\rho(l)})$$

両辺を $(v_1,\dots,v_{k+l})\in V^{k+l}$ で評価すると，授業での定義より

$$
\begin{aligned}
(\omega\wedge\eta)(v_1,\dots,v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!}&\sum_{\tau\in S_k,\rho\in S_l}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\rho)\\
&\times\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}(\sigma)\omega_{\tau(1)}(v_{\sigma(1)})\cdots\omega_{\tau(k)}(v_{\sigma(k)})\eta_{\rho(1)}(v_{\sigma(k+1)})\cdots\eta_{\rho(l)}(v_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}
$$

τ,ρ に関する和を実行すると，示したい式の右辺になっている．

問題 139 略

問題 140 (1) 与式の右辺において X_l を $fX_l,\ f\in C^\infty(U)$ に取り換えたものは

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le i\le k+1,i\ne l}(-1)^{i-1}X_i(f\omega(X_1,\dots,\check{X}_i,\dots X_{k+1}))\\
&+(-1)^{l-1}fX_l\omega(X_1,\dots,\check{X}_l,\dots,X_{k+1})\\
&+\sum_{1\le i<j\le k+1,i\ne l,j\ne l}(-1)^{i+j}f\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\check{X}_i,\dots\check{X}_j,\dots,X_{k+1})\\
&+\sum_{1\le i=l<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega([fX_i,X_j],X_1,\dots,\check{X}_i,\dots,\check{X}_j,\dots,X_{k+1})\\
&+\sum_{1\le i<j=l\le k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,fX_j],X_1,\dots,\check{X}_i,\dots,\check{X}_j,\dots,X_{k+1})
\end{aligned}
$$

Leibniz ルールより，この式は元の右辺の f 倍に次を加えたものである．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1,i\ne l}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i(f)\omega(X_1,\dots,\check{X}_i,\dots,X_{k+1})\\
&+\sum_{l=i<j}(-1)^{i+j}(-X_j(f))\omega(X_i,X_1,\dots,\check{X}_i,\dots,\check{X}_j,\dots,X_{k+1})\\
&+\sum_{i<j=l}(-1)^{i+j}X_i(f)\omega(X_j,X_1,\dots,\check{X}_i,\dots,\check{X}_j,\dots,X_{k+1})
\end{aligned}
$$

第 2 項・第 3 項は反対称性を使って ω の引数の順番を入れ替えると

$$
\sum_{l<j}(-1)^jX_j(f)\omega(X_1,\dots,\check{X}_j,\dots,X_{k+1})+\sum_{i<l}(-1)^iX_i(f)\omega(X_1,\dots,\check{X}_i,\dots,X_{k+1})
$$

と等しく，これは第 1 項とキャンセルする．以上の計算より右辺は X_l について $C^\infty(U)$ 線形である．

(2) 隣接互換を行ったときに符号が変わることを示せばよい．与式の右辺を第 1 項と第 2 項に分けて考える．

$$
\begin{aligned}
\text{第 1 項} &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i\omega(X_1,\dots,\check{X}_i,\dots,X_{k+1})\\
\text{第 2 項} &= \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\check{X}_i,\dots\check{X}_j,\dots,X_{k+1})
\end{aligned}
$$

第 1 項で X_l と X_{l+1} を入れ替えるとき，

(a) $i \notin \{l, l+1\}$ の項は (-1) 倍される．

(b) $i = l$ の項は $i = l+1$ の項の (-1) 倍になる．

(c) $i = l+1$ の項は $i = l$ の項の (-1) 倍になる．

より第 1 項は全体として (-1) 倍されることが分かる．

同様に，第 2 項で X_l と X_{l+1} を入れ替えるとき，

(a) $\{i, j\} \cap \{l, l+1\} = \emptyset$ の項は (-1) 倍される．

(b) $i = l,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項は $i = l+1,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項の (-1) 倍となる．

(c) $i = l+1,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項は $i = l,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項の (-1) 倍となる．

(d) $i \notin \{l, l+1\},\, j = l$ の項は $i \notin \{l, l+1\},\, j = l+1$ の項の (-1) 倍となる．

(e) $i \notin \{l, l+1\},\, j = l+1$ の項は $i \notin \{l, l+1\},\, j = l$ の項の (-1) 倍となる．

(f) $i = l,\, j = l+1$ の項は (-1) 倍される．

より，第 2 項も全体として (-1) 倍されることが分かる．

以上より右辺で X_l, X_{l+1} を入れ替えると (-1) 倍される．

(3) $\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \omega_{j_1, \ldots, j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_l \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \frac{\partial \omega_{j_1, \ldots, j_k}}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\ &= \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{j_a < l < j_{a+1}} \frac{\partial \omega_{j_1, \ldots, j_k}}{\partial x_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_a} \wedge dx_l \wedge dx_{j_{a+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \end{aligned}$$

であるから，添え字の列 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+1}$ に対して

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\right) = \sum_{a=1}^{k+1} (-1)^{a-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, \widehat{i_a}, \ldots, i_{k+1}}}{\partial x_{i_a}}$$

これは右辺第 1 項の $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}$ での値と等しい．またこのとき $[X_i, X_j] = 0$ ゆえ，右辺第 2 項は消えている．従って $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}$, $i_1 < \cdots < i_{k+1}$ のときに与えられた等式が成立する．

U は座標近傍なので，任意のベクトル場は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ の $C^\infty(U)$ 係数の一次結合で表される．左辺は $C^\infty(U)$ 上多重線形かつ反対称，右辺も $C^\infty(U)$ 上多重線形かつ反対称であることから，一般の $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(U)$ に対して等式が成立することが結論される．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 3 点．各小問を 1 点づつとする．かなり細かい議論になるので，ある程度甘めに見て，この解答ほど詳細が書かれていなくても状況を理解していて重要なポイントが議論されていれば点数を与えたい．例えば，(1) では f を微分する項を計算し，それがキャンセルすることが言及されているかどうか，(2) では第 1 項と第 2 項が各々(-1) 倍されることが言及されているかどうか，(3) では $d\omega(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}})$ が正しく計算されていれば点数を与えてよい．(このパターンに当てはまらない解答は個別に判断する．) 軽微なミスは減点しない．

問題 141 (1) 局所座標を使って $X_i = \sum_{j=1}^m f_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ と書けるとする．仮定から $(f_{i,j}(x))$ は正則行列に値を持つ C^∞ 級関数である．このとき $\theta_i = \sum_{j=1}^m g_{i,j}(x)dx_j$ とおくと $(g_{i,j})$ は $(f_{i,j})$ の転置の逆行列であり，従って $g_{i,j}(x)$ は C^∞ 級．

(2) 問題 140 の公式を使うと，

$$d\theta_i(X_j, X_k) = X_j\theta_i(X_k) - X_k\theta_i(X_j) - \theta_i([X_j, X_k]) = -a_{j,k,i}$$

一方で問題 138 の公式および性質 $a_{j,k,i} = -a_{k,j,i}$ から，

$$\frac{1}{2}\sum_{j',k'} a_{j',k',i}\,(\theta_{j'} \wedge \theta_{k'})(X_j, X_k) = \frac{1}{2}(a_{j,k,i} - a_{k,j,i}) = a_{j,k,i}.$$

$\{X_i\}$ は各点で基底をなしているから，以上より示された．

問題 142 メビウスの帯 M に C^∞ 級多様体の構造を導入する．M が Hausdorff 位相空間であることの証明は省略する．$\pi\colon [0,1]\times(-1,1) \to M$ を射影とし，2 つの座標系 $(U_1,\varphi_1), (U_2,\varphi_2)$ を以下のように定める．

- $U_1 = \pi((0,1)\times(-1,1))$，$\varphi_1\colon U_1 \to (0,1)\times(-1,1)$, $\varphi_1(\pi(x,y)) = (x,y)$.
- $U_2 = \pi(\{(x,y) \in [0,1]\times(-1,-1) : x \neq 1/2\}$，$\varphi_2\colon U_2 \to (0,1)\times(-1,1)$ は

$$\varphi_2(\pi(x,y)) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2}, -y) & 0 \le x < 1/2 \\ (x-\frac{1}{2}, y) & 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

とおく．φ_1, φ_2 が同相写像であること，また座標変換が C^∞ 級であることは省略する．

一般に向きづけられた多様体 M で次の事実が成り立つ．

> $(U; x_1, \ldots, x_m)$ を連結な座標近傍とする．ある一点 $p \in U$ において $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ が T_pM の向きを与えているとすると，任意の点 $q \in U$ に対して $(\frac{\partial}{\partial x_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_q$ は T_qM の向きを与える．

この事実を認めてメビウスの帯 M が向きづけ可能ではないことを示そう．M が向きづけられているとする．上の事実を用いると U_1, U_2 は連結であるから φ_1, φ_2 は正の座標系であるか負の座標系であるかのいずれかである．従って座標変換 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ のヤコビアンは（連結成分によらず）常に正か常に負でなければならない．一方 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は集合

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \{(x,y) \in (0,1)\times(-1,1) : x \neq 1/2\}$$

上で定義され，次で与えられる：

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x,y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2}, -y) & 0 < x < 1/2 \\ (x-\frac{1}{2}, y) & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

従って座標変換は $0 < x < 1/2$ の領域においてヤコビアンが負，$1/2 < x < 1$ の領域においてヤコビアンが正となる．これは上に述べたことと矛盾する．

事実の証明：基底 $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ は与えられた T_pM の向きと一致するか，一致しないかのいずれかである．向きが一致する点 p のなす部分集合を U_1, 一致しない点 p のなす部分集合を U_2 とする．$U = U_1 \sqcup U_2$ であり $U_1 \neq \varnothing$ である．$p \in U_1$ をとる．多様体の向きづけの定義により p の近傍 $V \subset U$ および V 上の座標系 $(y_1, \ldots, y_m)$ が存在して全ての点

$q \in V$ に対して $(\frac{\partial}{\partial y_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial y_m})_q$ は T_qM の向きを与える．必要ならば点 p を含む連結成分をとることで V は連結と仮定してよい．ヤコビアン

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$$

は V 上のいたるところ消えない連続関数であり，また点 p で正である．従って V の連結性からこのヤコビアンは V 上いたるところ正である．すなわち $(\frac{\partial}{\partial x_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_q$ は全ての点 $q \in V$ に対して T_qM の向きを与える．従って $V \subset U_1$．以上の議論は U_1 が開集合であることを示している．同様にして U_2 も開集合である．U は連結と仮定していたので，$U_1 = U$，$U_2 = \varnothing$．以上で事実が証明された．

幾何学 I　演習問題 No.13 (2020 年 7 月 22 日)

基本問題

問題 146 M, N を向き付けられた多様体で，$m = \dim M, n = \dim N$ とする．このとき積多様体 $M \times N$ には M の正の座標と N の正の座標をこの順序で並べて得られる局所座標を正の座標とする向きが入る．積多様体 $N \times M$ にも同様にして向きを入れておく．微分同相写像 $M \times N \to N \times M, (x, y) \mapsto (y, x)$ はいつ向きを保つか．

問題 147 単位閉円板 $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ が境界付き多様体の構造を持つことを確認せよ．また D^2 に標準的な向きを入れるとき，その境界の S^1 に誘導される向きは左回りであることを確認せよ．

問題 148 (第 2 可算公理を満たす)m 次元多様体 M の向きは次の 3 つの同値な概念で与えられることを確かめよ．ただし $m \geq 1$ とする．

(1) 各点 $p \in M$ に対して接空間 T_pM の向きが定められており，それは次の意味で p について連続に変化する．任意の点 $p \in M$ に対して p を含む座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ が存在して任意の $q \in U$ に対して T_qM の向きは $(\frac{\partial}{\partial x_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_q$ で与えられる．

(2) M のアトラス $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ で任意の座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ のヤコビアンが正となるものの同値類．ただし，そのような性質を持つ 2 つのアトラス $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ が同値であるとは，$\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ が再びその性質を持つ (つまり座標変換のヤコビアンがつねに正となる) アトラスであること．

(3) M 上の至る所消えない滑らかな m-form ω の同値類．ただし，至る所消えない m-form ω, ω' が同値であるとは，ある正の値をとる C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $\omega' = f\omega$ となること．

標準問題

問題 149 単位閉区間 $[0, 1]$ は向き付けられた境界付き多様体と見なせる．$[0, 1]$ の境界 $\{0, 1\}$ に誘導される向きは何か．より一般に境界のない向き付けられた m 次元多様体 M に対して $M \times [0, 1]$ は向き付けられた境界付き多様体の構造をもつ．$\partial(M \times [0, 1]) = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$ に誘導される向きは何か．

問題 150 M を連結で向き付け可能な多様体とし，$p \in M$ とする．M の向きは T_pM の向きを誘導するので，自然な写像

$$\{M \text{ の向き}\} \to \{T_pM \text{ の向き}\}$$

があるが，これが全単射であることを示せ．

問題 151 上半空間 $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$ を考える．U, V を $\mathbb{H}^m$ の (相対位相に関する) 開集合，$\phi\colon U \to V$ を C^∞ 級同相写像とする[1]．$\partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\}$ に対して $\phi(U \cap \partial\mathbb{H}^m) = V \cap \partial\mathbb{H}^m$ が成立することを示せ．特にこのことから境界付き C^∞ 級多様体の「境界」が well-defined であることが分かる．(実際には ϕ は同相と仮定するだけで結論が成立する．)

問題 152 $f\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像．$a \in \mathbb{R}$ を f の正則値とする．このとき $f^{-1}((-\infty, a])$ は境界付き多様体であることを示せ．

問題 153 M を向き付け可能な多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像，$x \in N$ を f の正則値とする．このとき，M の部分多様体 $f^{-1}(x)$ は向き付け可能であることを示せ．

問題 154 ベクトル解析で学ぶ以下の定理が，今回の授業で学んだ Stokes の定理の特別の場合であることを確かめよ．各々の場合について境界の向きにも注意せよ．

(1) Green の定理：D を境界が滑らかな $\mathbb{R}^2$ の領域としたとき，

$$\int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} fdx + gdy$$

ただし ∂D には D の内部を左側に見ながら進む向きが入っている．

(2) Stokes の定理：D を $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな境界付き曲面としたとき，

$$\int_D \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\ell$$

ただし $\mathbf{n}$ は D の単位法ベクトルである．$\mathbf{n}$ の向いている側を D の表と考えたとき，∂D には D を左に見ながら進む向きが入っている．

(3) Gauss の発散定理：Ω を境界が滑らかな $\mathbb{R}^3$ の領域としたとき，

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{A}\, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

ここで $\mathbf{n}$ は Ω の外向き単位法ベクトル．

---

[1] ただし $\mathbb{R}^m$ の部分集合 A で定義された関数 f が C^∞ 級であるとは，任意の $x \in A$ に対して x の $\mathbb{R}^m$ での開近傍 U_x および C^∞ 級関数 $\tilde{f}_x\colon U_x \to \mathbb{R}$ が存在して $f|_{U_x \cap A} = \tilde{f}_x|_{U_x \cap A}$ が成立することである．$\mathbb{R}^m$ に値をとる関数が C^∞ 級であることも同様に定義される．この問題における写像 $\phi\colon U \to V$ が C^∞ 級同相写像であるとは，(1) ϕ が全単射であって，(2) ϕ を写像 $U \to \mathbb{R}^m$ と考えたときに C^∞ 級であり，(3) ϕ^{-1} を写像 $V \to \mathbb{R}^m$ と考えたときに C^∞ 級であること，と定義する．

問題 155 正則関数に対するコーシーの積分定理 $\int_C f(z)dz = 0$ を Stokes の定理から導け．

問題 156 M を向き付けられた m 次元多様体，$f\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の沈め込みとする．ω を M 上の $m-1$ 形式で $f\colon \mathrm{Supp}(\omega) \to \mathbb{R}$ が固有 (proper) であるものとする．問題 153 より部分多様体 $f^{-1}(t)$ は自然に向き付けられていることに注意する．

(1) $d\omega = 0$ であるとき，$\int_{f^{-1}(t)} \omega$ は t によらないことを示せ．

(2) X を M 上のベクトル場で任意の点 $p \in M$ に対して $d_p f(X_p) = (\frac{\partial}{\partial t})_{f(p)}$ が成り立つものとする．ここで t は $\mathbb{R}$ の座標である．このとき

$$\frac{d}{dt}\int_{f^{-1}(t)} \omega = \int_{f^{-1}(t)} \mathcal{L}_X \omega$$

を示せ．

問題 157 (Poincaré の補題) $p \geq 1$ とする．$\mathbb{R}^m$ 上の p-form $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$ が $d\omega = 0$ を満たすとき，$\omega = d\eta$ を満たす $(p-1)$-form $\eta \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^m)$ が存在することを示せ．

<u>発展問題</u>

問題 158 $\mathbb{H}^m$ の (相対位相に関する) 開集合 U 上の関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ について，次は同値であることを示せ．

(1) 任意の点 $x \in U$ に対して x の $\mathbb{R}^m$ での開近傍 U_x と U_x 上の C^∞ 級関数 $\tilde{f}_x$ が存在して $f|_{U_x \cap U} = \tilde{f}_x|_{U_x \cap U}$

(2) f は $U \setminus \partial\mathbb{H}^m$ 上の C^∞ 級関数であって，f の任意階の偏導関数 $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ は U 上の連続関数に拡張する．

幾何学 I　演習問題 No.13 略解

問題 146 与えられた微分同相写像は向きを $(-1)^{mn}$ 倍する．

問題 147 図を書いて考える．

問題 148 定義を理解する演習問題．(1) と (3) の関係については授業で説明した．

問題 149 M の正の局所座標を $(x_1, \dots, x_m)$ し，t を $[0,1]$ の座標とする．$M \times [0,1]$ の正の局所座標は $(x_1, \dots, x_m, t)$ で与えられる．従って順番を入れ替えて $(t, x_1, \dots, x_{m-1}, (-1)^m x_m)$ も正の局所座標．このことから境界に入る向きは，$M \times \{1\}$ には M の向きの $(-1)^m$ 倍，$M \times \{0\}$ には M の向きの $(-1)^{m-1}$ 倍が入っている．

問題 150 問題 148 より，

$$M \text{ の向き} \iff M \text{ 上の至る所消えない } m\text{-form } \omega \text{ の同値類}$$

である．ただし $m = \dim M$．M は向き付け可能なので，M 上の至る所消えない m-form ω が存在する．M 上の至る所消えない m-form の同値類の集合が $[\omega]$, $[-\omega]$ の 2 つの元からなることを示せばよい．η を M 上の至る所消えない m-form とするとき，あるゼロでない関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が存在して $\eta = f\omega$ が成立する．M の連結性から f は至る所正か，至る所負かのいずれかである．従って $[\eta] = [\omega]$ あるいは $[\eta] = [-\omega]$ である．

問題 151 $\phi(U \cap \partial\mathbb{H}^m) \subset V \cap \partial\mathbb{H}^m$ を示せばよい．(以下の議論において ϕ と ϕ^{-1} を取り換えると $\phi^{-1}(V \cap \partial\mathbb{H}^m) \subset U \cap \partial\mathbb{H}^m$，すなわち $V \cap \partial\mathbb{H}^m \subset \phi(U \cap \partial\mathbb{H}^m)$ も言える．) $p \in U \cap \partial\mathbb{H}^m$ をとり，$q = \phi(p)$ とする．$f = x_m \circ \phi^{-1}$ は V 上の C^∞ 級関数であり，非負実数に値を持つ．また $f(q) = 0$ であるので，f は q で最小値を持つ．ここで $q \notin \partial\mathbb{H}^m$ であれば，q は V の ($\mathbb{R}^m$ の位相に関する) 内点であるから，f の q での微分は 0 である．一方で $d_q f = d_p x_m \circ d_q(\phi^{-1})$ であり，ϕ^{-1} は微分同相であることから $d_q(\phi^{-1})$ は同型．また $d_p x_m \neq 0$．従って $d_q f \neq 0$．これは矛盾であり，$q \in \partial\mathbb{H}^m$ でなければならない．

ϕ が単に同相のときは，Brouwer の領域不変性 (invariance of domain) 定理を使えば主張が言える．

問題 152 沈め込みの局所座標表示からわかる．

問題 153 $p \in f^{-1}(x)$ に対して次の完全列がある

$$0 \to T_p f^{-1}(x) \to T_p M \xrightarrow{d_p f} T_x N \to 0$$

これから，$T_x N$ の向きと $T_p M$ の向きから $T_p f^{-1}(x)$ の向きが誘導されることが分かる．つまり，$m = \dim M$, $n = \dim N$ とするとき，$v_1, \dots, v_{m-n} \in T_p f^{-1}(x)$ が正の基底であるのは，ある $v_{m-n+1}, \dots, v_n \in T_p M$ が存在して，$v_1, \dots, v_n$ が $T_p M$ の正の基底であり $d_p f(v_{m-n+1}), \dots, d_p f(v_n)$ が $T_x N$ の正の基底になることとする．この向きが局所的には座標で与えられることを確かめることができ，従って $f^{-1}(x)$ は向き付け可能である．